Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Behrndt, C. Kreusler

Sommersemester 2010

Analysis III

6.Übungsblatt

Abgabe vor den Tutorien am 2. / 3. Juni.
Dies ist das letzte Übungsblatt der ersten Semesterhälfte.

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Gegeben sei die Funktion

$$f : [1, \infty) \times [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) := e^{-xy} - 2e^{-2xy}.$$

Zeige anhand der Integrale

$$\int_0^1 \int_1^\infty f(x, y) d\lambda(x)\, d\lambda(y) \quad \text{und} \quad \int_1^\infty \int_0^1 f(x, y) d\lambda(y)\, d\lambda(x),$$

daß der Satz von Fubini hier nicht anwendbar ist und begründe warum dies der Fall ist.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $f, g : \Omega \to [0, \infty)$ meßbar. Zeige die folgenden Behauptungen:

(i) Für $1 \leq p < \infty$ gilt[1]

$$\int_\Omega f^p d\mu = \int_0^\infty p t^{p-1} \mu(\{f > t\}) dt.$$

(ii) Ist $\mu(\{f > t\}) \leq \mu(\{g > t\})$ für alle $t \geq 0$, so folt $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.

Hinweis: Es ist $f(x)$ gleich dem Lebesgue-Integral der Funktion $\chi_{[0, f(x))}$

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Für eine Borel-Menge $A \subset [0, 1] \times [0, 1]$ betrachten wir die folgenden Aussagen:

(1) Für fast alle $x \in [0, 1]$ gilt: Für fast alle $y \in [0, 1]$ ist $(x, y) \in A$.

(2) Für fast alle $y \in [0, 1]$ gilt: Für fast alle $x \in [0, 1]$ ist $(x, y) \in A$.

(3) Für alle $x \in [0, 1]$ gilt: Für fast alle $y \in [0, 1]$ ist $(x, y) \in A$.

(4) Für fast alle $y \in [0, 1]$ gilt: Für alle $x \in [0, 1]$ ist $(x, y) \in A$.

Gilt (1) $\iff$ (2)? Gilt (3) $\iff$ (4)?

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Es sei mit $\mathfrak{A}(\mathbb{R}^m)$ die Lebesgue-σ-Algebra auf $\mathbb{R}^m$ bezeichnet. Zeige, daß die Produkt-σ-Algebra $\mathfrak{A}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{A}(\mathbb{R})$ echt in $\mathfrak{A}(\mathbb{R}^2)$ enthalten ist.
Hinweis: Die Lebesgue-σ-Algebra ist die Vervollständigung der Borel-σ-Algebra.

[1] Wir verwenden folgende übliche Notation: $\{f > t\} = \{x \in \Omega \,|\, f(x) > t\}$.