Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Behrndt, C. Kreusler

Sommersemester 2010

Klausur - Analysis III
Aufgaben

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Kennzeichnen Sie wahre Aussagen mit **W** und falsche Aussagen mit **F**. Es sind keine Begründungen nötig. Für jede richtige Antwort gibt es einen halben Punkt, für jede falsche wird ein halber Punkt abgezogen, nicht beantwortete Teilaufgaben werden nicht bewertet. Die minimale Gesamtpunktzahl ist Null.

- ☐ Es sei Ω eine nichtleere Menge und $\mathfrak{A} = P(\Omega)$, die Potenzmengen-σ-Algebra auf Ω. Dann ist jede Funktion $f : \Omega \to \Omega$ meßbar.
- ☐ Jede stetige Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ ist Lebesgue-integrierbar.
- ☐ Es sei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ und $f, g : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ integrierbare Funktionen. Gilt $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \int_{\mathbb{R}} g d\lambda$, so ist $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- ☐ Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ stetig. Sind dann u_1 und u_2 Lösungen der inhomogenen Gleichung $u'(t) = Au(t) + b(t)$, $t \in \mathbb{R}$, so ist auch $u_1 + u_2$ eine Lösung dieser Gleichung.
- ☐ Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein offenes Rechteck, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und γ eine geschlossene Kurve in G. Dann gilt $\int_\gamma f(z)dz = 0$.
- ☐ Es gibt eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = 0$ für alle $z \in \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$ und $f(2) = 1$.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Sei
$$B := \Big\{(0,\infty), (-1,1), (-\frac{1}{2},\frac{1}{2}), (-\frac{1}{3},\frac{1}{3}), (-\frac{1}{4},\frac{1}{4}), \dots\Big\}$$
und sei $\mathfrak{A}$ die kleinste σ-Algebra über $\mathbb{R}$, die B enthält.

(a) Gehört das Intervall $(-\infty, 0)$ zu $\mathfrak{A}$?

(b) Ist die Funktion
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } x < 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ 1, & \text{falls } x > 0, \end{cases}$$
bezüglich $\mathfrak{A}$ meßbar?

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Berechnen Sie den Grenzwert
$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty e^{-x}\big(\cos(x)\big)^n \,\mathrm{d}x.$$
Hinweis: Untersuchen Sie zunächst den Integranden auf punktweise Konvergenz.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Es sei mit λ das Lebesguemaß auf $[0,1]$ bezeichnet. Wir betrachten die Funktionenfolge (f_n), die für $n \in \mathbb{N}$ durch

$$f_n(x) := \frac{1}{\sqrt{x}} \chi_{[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]}(x), \quad x \in [0,1],$$

gegeben ist.

Entscheiden Sie (mit Begründung), ob diese Funktionenfolge im jeweiligen Sinne für $n \to \infty$ gegen die Nullfunktion konvergiert.

(i) punktweise

(ii) gleichmäßig

(iii) fast überall bezüglich λ

(iv) bezüglich der L^1-Norm $\|\cdot\|_1$

(v) bezüglich der L^2-Norm $\|\cdot\|_2$.

Aufgabe 5: **5 Punkte**

(i) Bestimmen Sie explizit die Lösung $u : I \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$u'(t) = e^{u(t)} \sin(t), \quad u(0) = 0,$$

sowie das maximale Existenzintervall I.

(ii) Lösen Sie das Anfangswertproblem $u'(t) - 2tu(t) + t = 0$ zum Anfangswert $u(0) = 0$.

Aufgabe 6: **5 Punkte**

(i) Finden Sie eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, deren Realteil durch

$$\mathrm{Re} f(x+iy) = x^3 - 3xy^2, \quad x + iy \in \mathbb{C},$$

gegeben ist.

(ii) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Es sei weiterhin $z_0 \in G$. Zeigen Sie, daß für ein hinreichend kleines $r > 0$ gilt:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$