Tutorien am 30. 6. / 1. 7.

Aufgabe 1:
Untersuche, ob die folgenden Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph sind.

(i) $f(z) = \mathrm{Im}(z)$

(ii) $f(z) = \overline{z}$

(iii) $f(z) = |z|^2$

(iv) $f(z) = g(z) + ig(z)$, wobei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ differenzierbar sei.

Aufgabe 2:
Es sei $a \in \mathbb{C}$. Es sei weiter $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) := a + e^{it}$. Schließlich sei γ_2 die geschlossene Kurve, die die Punkte $a - 1 - i$, $a + 1 - i, a + i$ mit geraden Strecken verbindet. Bestimme für alle $n \in \mathbb{Z}$ die Integrale

$$\int_{\gamma_1} (z-a)^n dz \quad \text{und} \quad \int_{\gamma_2} (z-a)^n dz.$$

Aufgabe 3:
Bestimme für $r > 0$ und $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := re^{it}$ das Integral $\int_\gamma \mathrm{Re}(z) dz$.

Aufgabe 4:
Auf $K = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - 1| < 1\}$ sei die Funktion f durch

$$f(z) := -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-z)^n}{n}$$

definiert. Zeige, daß f wohldefiniert und holomorph ist und berechne die Ableitung von f.

Aufgabe 5:
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Weiterhin sei $\overline{G} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \overline{z} \in G\}$. Schließlich sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zeige oder widerlege die folgenden Aussagen.

(i) $g(z) := f(\overline{z})$ ist holomorph in $\overline{G}$.

(ii) $g(z) := \overline{f}(z)$ ist holomorph in G.

(iii) $g(z) := \overline{f(\overline{z})}$ ist holomorph in $\overline{G}$.