Tutorien am 2. / 3. Juni

Aufgabe 1:
Bestimme die allgemeine Lösung der folgenden DGL und ggf. die Lösung des AWP.

(i) $y' - 2ty + t = 0$, $y(0) = 0$.

(ii) $y' = y\tan(t) - 2\sin(t)$, $y(0) = 2$.

(iii) $y' = e^y \cos(t)$

(iv) $y' = e^t \cos(y)$.

Hinweis: $\int \frac{dx}{\cos(x)} = \ln(\tan(x/2 + \pi/4))$.

Aufgabe 2:
Für $p, q \in \mathbb{R}$ sei folgende DGL gegeben: $y'' + py' + qy = 0$. Ferner seien $\lambda_{1,2}$ die Lösungen der quadatischen Gleichung $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Zeige:

(i) Sind $\lambda_{1,2}$ reell und $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so ist für alle $c_{1,2} \in \mathbb{R}$ die Funktion $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ eine Lösung der DGL.

(ii) Ist $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$, so ist für alle $c_{1,2} \in \mathbb{R}$ die Funktion $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t}$ eine Lösung der DGL.

(iii) Ist $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ und $\alpha = \mathrm{Re}(\lambda_1)$, $\beta = \mathrm{Im}(\lambda_1)$, so ist für alle $c_{1,2} \in \mathbb{R}$ die Funktion $y(t) = e^{\alpha t}\big(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)\big)$ eine Lösung der DGL.

(iv) Warum gibt es keine anderen Fälle?

(v) Bestimme die allgemeine Lösung von $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Aufgabe 3:
Eine *logistische* Differentialgleichung ist von der Form

$$\begin{cases} y'(t) = \alpha y(t)(K - y(t)), & t > 0, \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

mit gewissen Parametern $\alpha, K > 0$ und dem Anfangswert $y_0 \geq 0$.

(i) Überlege, wie die qualitativ Lösung verläuft, ohne das AWP zu lösen.

(ii) Löse das AWP.