Kapitel 2

Schwache Lösungstheorie elliptischer Gleichungen

Im ersten Kapitel haben wir gesehen, wie mit Hilfe spezieller Lösungsmethoden (Separationsansatz, Charakteristikenmethode, Fundamentallösung, selbstähnlichen Lösungen,...) klassische Lösungen von speziellen Typen partieller Differentialgleichungen konstruiert werden können.
Leider ist es aber für allgemeinere Typen von PDEs i.a. nicht möglich, explizite Lösungen zu konstruieren. Darüber hinaus ist schon der Begriff der klassischen Lösung an sich zu restriktiv, denn:

1.) Vorgegebene Daten aus Praxisproblemen sind häufig unstetig.

Die Existenz einer klassischen Lösung setzt aber schon bei den speziellen linearen PDEs, die wir im ersten Kapitel untersucht haben, die Glattheit der Daten voraus. Triviales Beispiel: $u''(x) = f(x)$, $x \in]0,1[$ - es kann nur dann eine klassische Lösung $u \in C^2(]0,1[)$ existieren, wenn die rechte Seite $f \in C]0,1[)$.

2.) Nichtlineare PDEs besitzen i.a. selbst bei beliebig glatten Daten keine klassischen Lösungen.

Dies haben wir im ersten Kapitel am Beispiel der nichtlinearen skalaren Erhaltungsgleichung $u_t + uu_x = 0$ mit Hilfe der Charakteristikenmethode gesehen.

3.) Der klassische Rahmen eignet sich nicht für die Anwendung numerischer Verfahren.

Wünschenswert wäre ein Rahmen, indem wir sowohl die (kontinuierliche) PDE als auch geeignete approximierende diskrete Gleichungen untersuchen können. Da Lösungen von diskretisierten Gleichungen allenfalls stetig, aber i.a. nicht stetig differenzierbar sind, muss der Rahmen flexibler sein. Die Funktionenräume, in denen wir eine PDE (und ihre Diskretisierungen) untersuchen und lösen wollen, müssen gross genug sein und nicht differenzierbare, eventuell sogar unstetige Funktionen enthalten.

Ziel dieses Kapitels ist es, solche geeignet grossen Funktionenräume sowie einen neuen allgemeineren Lösungsbegriff einzuführen.

<u>Problem</u>: Wie kann man in sinnvoller Weise eine Lösung u einer PDE, etwa der Gleichung $-u'' = f$ auf $]0,1[$, definieren, ohne zu fordern, dass u mindestens zweimal

differenzierbar ist?

Grundidee:
* Multipliziere die PDE (formal) mit einer glatten Funktion („Testfunktion“)
* Integriere die so erhaltene Gleichung über das Gebiet, auf dem die PDE zu lösen ist
* „Übertrage“ dann, durch partielle Integration, die Differentiation auf die Testfunktion.

Beispiel: Betrachte das Randwertproblem

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{auf }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Die Multiplikation der PDE mit einer Testfunktion $\varphi \in C_c^\infty(]0,1[)$ und anschliessende Integration über $]0,1[$ liefert (formal)

$$-\int_0^1 u''(x)\varphi(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Partielle Integration links liefert

$$\int_0^1 u'(x)\varphi'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\varphi(x)\,dx \tag{2.2}$$

(es entsteht kein Randterm, da $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$).

Es besteht die Möglichkeit, eine weitere partielle Integration links durchzuführen. Man erhält so

$$-\int_0^1 u(x)\varphi''(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\varphi(x)\,dx \tag{2.3}$$

Die obige Rechnung ist formal. Ist aber $u \in C^2(]0,1[) \cap C([0,1])$ eine klassische Lösung des RWPs (2.1), dann lässt sich obige Argumentation rechtfertigen, und wir sehen, dass die klassische Lösung u sowohl die Integralgleichungen (2.2) als auch (2.3) für alle Testfunktionen $\varphi \in C_c^\infty(]0,1[)$ erfüllt.
Damit die Integralgleichungen (2.2) bzw. (2.3) wohl definiert sind, benötigt man aber gar nicht, dass $u \in C^2(]0,1[) \cap C([0,1])$ ist. Gleichung (2.2) macht schon Sinn, wenn nur $u' \in L^1_{loc}(0,1)$ und $f \in L^1_{loc}(0,1)$, Gleichung (2.3) ist sogar schon sinnvoll, wenn nur $u \in L^1_{loc}(0,1)$ und $f \in L^1_{loc}(0,1)$ [1].
Wir haben somit zwei Möglichkeiten gefunden, eine „ schwächere “ Form von Lösung des RWPs (2.1) zu definieren:

[1] Erinnerung: Für eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $1 \leq p < \infty$, bezeichnet $L^p_{loc}(\Omega)$ die Menge aller zur p-ten Potenz lokal integrierbaren Funktionen, d.h. die Menge aller messbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$, für die $\int_K |f(x)|^p dx < +\infty$ für alle kompakten Teilmengen $K \subset \Omega$.

A.) $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass u' (in einem noch zu präzisierenden Sinne) existiert, $u' \in L^1_{loc}(0,1)$ und so, dass die Integralgleichungen (2.2) für alle $\varphi \in C_c^\infty(]0,1[)$ erfüllt sind.

B.) $u \in L^1_{loc}(0,1)$ mit der Eigenschaft, dass die Integralgleichungen (2.3) für alle $\varphi \in C_c^\infty(]0,1[)$ erfüllt sind.

Bemerkung: In den meisten Fällen sind wir an der Wohlgestelltheit eines Randwert- bzw. Anfangswertproblems interessiert, d.h. das betrachtete Problem sollte eine Lösung besitzen, diese sollte zudem eindeutig bestimmt sein und stetig von den Daten abhängen.
Es ist daher darauf zu achten, dass der Lösungsbegriff nicht zu sehr abgeschwächt wird, da ansonsten die Eindeutigkeit einer Lösung nicht gewährleistet werden kann. Die oben vorgeschlagene zweite Möglichkeit der Definition einer verallgemeinerten Lösung von (2.1) ist ungeeignet, da sie offenbar keine Eindeutigkeit der Lösung garantiert (so ist für $f = 0$ etwa jede beliebige konstante Funktion $u = c$, $c \in \mathbb{R}$, eine solche Lösung. Aufgrund der gestellten Randbedingung im RWP (2.1) erscheint zwar die konstante Funktion $u = 0$ die einzige sinnvolle Lösung zu sein, jedoch bietet der funktionale Rahmen B.) keine Möglichkeit, die Randbedingung $u = 0$ zu fordern: eine Funktion $u \in L^1_{loc}(0,1)$ ist nur fast überall definiert. Da $\{0\}, \{1\}$ Lebesgue-Nullmengen, ist der Wert $u(0)$ bzw. $u(1)$ gar nicht definiert.

Wir wollen im folgenden Abschnitt zunächst die für eine schwache Lösungstheorie geeigneten Funktionenräume einführen.

2.1 Testfunktionen und Distributionen

In diesem Abschnitt bezeichnet Ω stets eine offene nicht-leere zusammenhängende Teilmenge des $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$.

Zunächst einmal wollen wir einen geeigneten Raum von Testfunktionen in Ω einführen. Für $0 \leq k \leq \infty$ bezeichnet

$$C_c^k(\Omega)$$

die Menge aller k-mal stetig differenzierbaren Funktionen $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger.

Erinnerung: Der Träger einer Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ ist definiert als die Menge

$$\overline{\{x \in \Omega;\ \varphi(x) \neq 0\}}$$

und wird mit $\mathrm{supp}(\varphi)$ (supp von (engl.) Support= Träger) bezeichnet.
Man schreibt oft

$$\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$$

und bezeichnet diese Funktionenmenge als Raum der Testfunktionen in Ω. Mit der üblichen skalaren Multiplikation und Addition von Funktionen ist $\mathcal{D}(\Omega)$ ein linearer Vektorraum. Leider ist es nicht möglich, auf dem Raum $\mathcal{D}(\Omega)$ (oder einem anderen

der Räume $C_c^k(\Omega)$) eine Norm $\|\cdot\|$ einzuführen, mit der $\mathcal{D}(\Omega)$ (bzw. einer der $C_c^k(\Omega)$-Räume) vollständig, also ein Banachraum wäre.
Es kann aber eine Topologie τ auf $\mathcal{D}(\Omega)$ definiert werden [2]. Mit Hilfe einer Topologie kann auf einem Raum ein Konvergenzbegriff erklärt werden. Wir benötigen im folgenden nur diesen, von der Topologie τ erzeugten Konvergenzbegriff.

Definition 2.1
Seien $(\varphi_n)_n, \varphi \subset \mathcal{D}(\Omega)$.
Die Folge $(\varphi_n)_n$ *konvergiert in* $\mathcal{D}(\Omega)$ *gegen* φ, wenn gilt:

(i) es existiert eine kompakte Menge $K \subset \Omega$ mit der Eigenschaft, dass

$$\text{supp } \varphi \subset K \quad \text{ und supp } \varphi_n \subset K, \forall n.$$

(ii) $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ gleichmässig auf Ω für alle Multiindices $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$.

In der obigen Definition haben wir die in der Theorie der PDEs allgemein übliche Notation der Multiindices benutzt: ein Multiindex ist ein N-Tupel $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N$ und für einen solchen bezeichnet

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots \alpha_N$$

die Differentiationsordnung der partiellen Ableitung

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \ldots \partial^{\alpha_N} x_N} u.$$

Wir werden die Notation auch im folgenden verwenden, da sie den Schreibaufwand für partielle Ableitungen deutlich vermindert.
Daneben werden wir auch die folgenden Bezeichnungen verwenden:

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (i - \text{te partielle Ableitung})$$

und

$$D = (D_1, \ldots, D_N) \quad \text{(Gradient)}.$$

Neben dem Raum der Testfunktionen benötigen wir einen möglichst grossen Funktionenraum, in dem wir die Lösungen von PDEs suchen können. Dieser sollte, nach unseren Eingangsbemerkungen, möglichst auch unstetige Funktionen enthalten. Die Elemente des Raumes sollten aber in einem geeigneten verallgemeinerten Sinn differenziert werden können.

Definition 2.2
Eine *Distribution in* Ω ist eine lineare Abbildung $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, die bezüglich des oben definierten Konvergenzbegriffes in $\mathcal{D}(\Omega)$ stetig ist.

[2] eine Topologie τ auf einer Menge X ist eine Menge τ von Teilmengen von X, die sog. „offenen Mengen" von X, mit der folgenden Eigenschaft: $\emptyset, X \in \tau$, $A \cap B \in \tau$ falls $A, B \in \tau$ und beliebige Vereinigungen $\cup_i A_{i \in I} \in \tau$, falls alle $A_i \in \tau$.

Beispiel (Distributionen)

1.) Für beliebiges $x \in \Omega$ ist $T_x : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$T_x(\varphi) = \varphi(x), \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

eine Distribution in Ω (die sogenannte *δ-Distribution* oder *das Dirac-Mass in x*).
Man schreibt oft: $\delta_x = T_x$.

2.) Für jedes $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ ist die Abbildung $T_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, die durch

$$T_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

definiert ist, eine Distribution in Ω.
Eine solche Distribution wird *reguläre Distribution* genannt. Man sagt auch: *T_f ist die durch f erzeugte Distribution* und identifiziert f und T_f.

Bemerkung
Die δ-Distribution ist keine reguläre Distribution.
Dies sieht man wie folgt: Angenommen, δ_x wäre eine reguläre Distribution für ein $x \in \Omega$. Dann gäbe es eine Funktion $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ mit der Eigenschaft, dass

$$\varphi(x) = \delta_x(\varphi) = \int_\Omega f(y)\varphi(y)\,dy \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{2.4}$$

Sei nun

$$\Phi(y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|y|^2}} & , |y| < 1 \\ 0 & , |y| \geq 1 \end{cases} \tag{2.5}$$

Man rechnet leicht nach, dass $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Wir definieren nun, für $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_n(y) = \Phi(n(y-x)), \quad y \in \mathbb{R}^N.$$

Es ist klar, dass auch $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Da $x \in \Omega$, Ω offen und der Support von φ_n die Kugel $B_{1/n}(x)$ mit Radius $1/n$ um x ist, ist auch klar, dass $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ für alle genügend grossen n. Einsetzen von $\varphi = \varphi_n$ in (2.4) ergibt

$$e^{-1} = \varphi_n(x) = \int_\Omega f(y)\varphi_n(y)\,dy = \int_{B_{1/n}(n)} f(y)\underbrace{e^{-\frac{1}{1-n^2|y-x|^2}}}_{\leq e^{-1}}\,dy$$

und folglich

$$e^{-1} \leq e^{-1} \int_{B_{1/n}(x)} f(y)\,dy.$$

Wegen der absoluten Steigkeit des Intgrals konvergiert die rechte Seite aber gegen 0 für $n \to \infty$. Widerspruch!

Notation: Wir bezeichnen mit $\mathcal{D}'(\Omega)$ die Menge aller Distributionen in Ω.

$\mathcal{D}'(\Omega)$ ist ein linearer Vektorraum mit den üblichen Operationen der skalaren Multiplikation und Addition von linearen Abbildungen: für $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ist αT die durch

$$(\alpha T)(\varphi) = \alpha T(\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

definierte Distribution, für $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ist $T_1 + T_2$ die durch

$$(T_1 + T_2)(\varphi) = T_1(\varphi) + T_2(\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

definierte Distribution. Ebenso wie $\mathcal{D}(\Omega)$ kann auch $\mathcal{D}'(\Omega)$ nicht geeignet normiert werden. Es gibt aber, analog wie für $\mathcal{D}(\Omega)$, wieder die Möglichkeit einen natürlichen Konvergenzbegriff zu definieren:

Definition 2.3
Seien $(T_n)_n, T \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Die Folge $(T_n)_n$ *konvergiert* gegen T *in* $\mathcal{D}'(\Omega)$, wenn gilt:

$$T_n(\varphi) \to T(\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Beispiel (Konvergenz in $\mathcal{D}'(\Omega)$)
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = \sin(nx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Es ist klar, dass $f_n \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ für alle n. Sei nun T_{f_n} die durch die Funktion f_n erzeugte reguläre Distribution, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. $]a, b[$ bezeichne ein Intervall mit supp $\varphi \subset]a, b[$. Dann gilt:

$$T_{f_n}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \sin(nx)\varphi(x)dx = \int_a^b \sin(nx)\varphi(x)dx \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

(dies folgt z.B. mit dem Lemma von Riemann-Lebesgue oder elementar durch partielle Integration: $\int_a^b \sin(nx)\varphi(x)dx = -\int_a^b \frac{\cos(nx)}{n}\varphi'(x)\,dx \to 0$).
Die Distributionenfolge T_{f_n} konvergiert also in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ gegen die Nulldistribution, d.h. die von der konstanten Nullfunktion erzeugte reguläre Distribution (das Nullelement in $\mathcal{D}'$). Kurz: $f_n \to 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
Beachte: Die Funktionenfolge $(f_n)_n$ ist auf $\mathbb{R}$ in keinem üblichen Sinne (gleichmässig oder punktweise) konvergent.

Ableitung von Distributionen

Wie kann nun für die sehr allgemeinen Elemente des Raumes $\mathcal{D}'(\Omega)$ (die oft auch *verallgemeinerte Funktionen* genannt werden) eine verallgemeinerte Form der Differentiation definiert werden? Natürlich ist es wünschenswert, dass der neue Begriff der Differentiation und der klassische Begriff konsistent sind. Mit anderen Worten: wenn eine Distribution T regulär ist und von einer glatten Funktion f erzeugt wird, dann sollte die verallgemeinerte neue Form der Ableitung der Distribution T_f mit der klassischen Ableitung von f übereinstimmen. Kurz: falls $f \in C^k(\Omega)$, dann sollte gelten

$$D^\alpha(T_f) = T_{D^\alpha f} \tag{2.6}$$

für alle Multiindices α mit $|\alpha| \leq k$ (wie gehabt identifizieren hier wieder die regulären Distribution T_f bzw. $T_{D^\alpha f}$ mit den sie erzeugenden Funktionen f bzw. $D^\alpha f$).
Aus (2.6) folgt aber mit partieller Integration für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

* im Fall $N = 1$, $\Omega =]a, b[$ und $\alpha = 1$

$$\begin{aligned}(T_f)'(\varphi) &= T_{f'}(\varphi)\\ &= \int_a^b f'(x)\varphi(x)\,dx\\ &= -\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx\\ &= -T_f(\varphi')\end{aligned}$$

(es entstehen keine Randterme, da $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$)

* im Fall $N = 1$, $\Omega =]a, b[$ und $k \in \mathbb{N}$ beliebig:

$$\begin{aligned}(T_f)^{(k)}(\varphi) &= T_{f^{(k)}}(\varphi)\\ &= \int_a^b f^{(k)}(x)\varphi(x)\,dx\\ &= \ldots\\ &= (-1)^k \int_a^b f(x)\varphi^{(k)}(x)\,dx\\ &= (-1)^k T_f(\varphi^{(k)})\end{aligned}$$

* und allgemein für $N \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}(D^\alpha T_f)(\varphi) &= T_{D^\alpha f}(\varphi)\\ &= \int_\Omega D^\alpha f(x)\varphi(x)\,dx\\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x) D^\alpha \varphi(x)\,dx\\ &= (-1)^{|\alpha|} T_f(D^\alpha \varphi).\end{aligned}$$

Kurz: es sollte also gelten:

$$(D^\alpha T_f)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T_f(D^\alpha \varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Diese Art der Definition einer Ableitung macht aber auch Sinn für allgemeinere und sogar nicht-reguläre Distributionen. Die Vorüberlegung motiviert also folgende

Definition 2.4
Sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ ein Multiindex. Dann ist die distributionnelle Ableitung $D^\alpha T$ von T definiert durch:

$$(D^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Bemerkung: Mit dieser Definition der Ableitung ist jede Distribution beliebig oft differenzierbar.

Beispiel (Ableitung von Distributionen)

(1) $\Omega = \mathbb{R}$, $T = \delta_0$:

$$\delta_0'(\varphi) = -\delta_0(\varphi') = -\varphi'(0)$$
$$\delta_0^{(k)} = (-1)^k \delta_0(\varphi^{(k)}) = (-1)^k \varphi^{(k)}(0).$$

2) $\Omega = \mathbb{R}$, $T = T_f$ mit $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} T_f'(\varphi) = -T_f(\varphi') &= -\int_{\mathbb{R}} |x|\varphi'(x)\,dx \\ &= -\int_0^\infty x\varphi'(x)\,dx + \int_{-\infty}^0 x\varphi'(x)\,dx \\ &= \int_0^\infty \varphi(x)\,dx + \int_{-\infty}^0 (-1)\cdot\varphi(x)\,dx \quad \text{(part. Integration)} \\ &= T_H(\varphi) \end{aligned}$$

wobei

$$H(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}.$$

3) $\Omega = \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $T = T_{\Phi_N}$ mit $\Phi_N(x) = \frac{1}{(N-2)\omega_N}\frac{1}{|x|^{N-2}}$, $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung:
Wir bemerken, dass $\Phi_N \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, da für beliebiges $0 < \epsilon < R$ gilt:

$$\begin{aligned} &\int_{B_R(0)\setminus B_\epsilon(0)} \Phi_N(x)\,dx \\ = \quad &\frac{1}{(N-2)\omega_N}\int_\epsilon^R \int_{|x|=r} \frac{1}{|x|^{N-2}}\,d\sigma(x)\,dr \qquad (N\text{-dim. Polarkoordinaten}) \\ = \quad &\frac{1}{(N-2)\omega_N}\int_\epsilon^R \frac{1}{r^{N-2}}\sigma(\partial B_r(0))\,dr \\ = \quad &\frac{1}{(N-2)\omega_N}\int_\epsilon^R \frac{1}{r^{N-2}}\omega_N r^{N-1}\,dr \\ = \quad &\frac{1}{N-2}\int_\epsilon^R r\,dr \\ \to_{\epsilon\to 0} \quad &\frac{R^2}{2(N-2)}. \end{aligned}$$

Somit ist Φ_N also integrabel in der Umgebung der 0, und damit ist klar, dass $\Phi_N \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

T_{Φ_N} ist daher eine wohldefinierte reguläre Distribution.
Φ_N ist ausserdem klassisch differenzierbar in $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi_N(x) = -\frac{1}{\omega_N}\frac{x_i}{|x|^N} \qquad \forall x \neq 0, i = 1, \dots, N,$$

und analog wie oben folgt, dass $\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi_N \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ für alle $i = 1, \dots, N$.
$\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi_N$ (bzw. die davon erzeugte reguläre Distribution) ist die gesuchte distributionnelle Ableitung $D_i T_{\Phi_N}$ der Distribution T_{Φ_N}, denn für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt:

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial}{\partial x_i}\Phi_N(x)\varphi(x)\,dx \\
= \; & \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\epsilon(0)} \frac{\partial}{\partial x_i}\Phi_N(x)\varphi(x)\,dx \\
= \; & \lim_{\epsilon \downarrow 0} \underbrace{\int_{\partial B_\epsilon(0)} \Phi_N(x)\varphi(x)\nu_i\,d\sigma(x)}_{|\cdot| \leq \frac{\|\varphi\|_\infty}{N-2}\epsilon \to_{\epsilon \to 0} 0} - \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\epsilon(0)} \Phi_N(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x)\,dx \\
\to \; & -\int_{\mathbb{R}^N} \Phi_N(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x)\,dx \\
= \; & D_i(T_{\Phi_N}(\varphi).
\end{aligned}$$

Nun können wir auch im distributionnellen Sinne $\Delta\Phi_N = \sum_{i=1}^N D_i D_i \Phi_N$ berechnen. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ist

$$\begin{aligned}
& \Delta(\Phi_N)(\varphi) \\
= \; & \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_N(x)\Delta\varphi(x)\,dx \\
= \; & \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\epsilon(0)} \Phi_N(x)\Delta\varphi(x)\,dx \\
= \; & \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left\{ \underbrace{\int_{\partial B_\epsilon(0)} \Phi_N(x)\frac{\partial\varphi}{\nu}(x)\,d\sigma(x)}_{|\cdot| \leq \frac{\|D\varphi\|_\infty}{N-2}\epsilon \to 0} - \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\epsilon(0)} D\Phi_N(x) \cdot D\varphi(x)\,dx \right\} \\
= \; & \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left\{ -\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\epsilon(0)} D\Phi_N(x) \cdot D\varphi(x)\,dx \right\} \\
= \; & \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left\{ -\int_{\partial B_\epsilon(0)} \frac{\partial}{\partial \nu}\Phi_N(x)\varphi(x)\,d\sigma(x) + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\epsilon(0)} \underbrace{\Delta\Phi_N(x)}_{=0}\varphi(x)\,dx \right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\epsilon\downarrow 0}\left\{-\int_{\partial B_\epsilon(0)}\frac{\varphi(x)}{\omega_N|x|^{N-1}}\,d\sigma(x)\right\}\\
&= \lim_{\epsilon\downarrow 0}\left\{-\frac{1}{\omega_N\epsilon^{N-1}}\int_{\partial B_\epsilon(0)}\varphi(x)\,d\sigma(x)\right\}\\
&= \lim_{\epsilon\downarrow 0}\left\{-\frac{1}{\omega_N\epsilon^{N-1}}\int_{\partial B_\epsilon(0)}\underbrace{(\varphi(x)-\varphi(0))}_{|\cdot|\leq\|D\varphi\|_\infty\epsilon}\,d\sigma(x)\right\}-\varphi(0)\\
&= -\varphi(0)\\
&= -\delta_0(\varphi).
\end{aligned}
$$

Kurz: $-\Delta(\Phi_N)=\delta_0$.

Bemerkung: Für einen allgemeinen **linearen** partiellen Differentialoperator 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten $L(u)=\sum_{i,j=1}^N a_{ij}D_iD_ju+\sum_{i=1}^N b_iD_iu+cu$ mit $a_{ij},b_i,c\in\mathbb{R}$ bezeichnet man eine Distribution $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, die die Gleichung $L(T)=\delta_0$ im distributionellen Sinne erfüllt, als Fundamentallösung.
Ein wichtiger Satz der linearen Funktionalanalysis ist der Satz von Malgrange-Ehrenpreis, der besagt, dass eine solche Fundamentallösung immer existiert.
Wie bereits im Fall der Poisson-Gleichung gesehen, kann mit Hilfe der Fundamentallösung eine Lösung u der Gleichung $Lu=f$ für f in geeigneten Funktionenräumen gefunden werden (siehe etwa W. Rudin, "Functional Analysis„, etc.).
Wir werden diesen Aspekt hier nicht weiter vertiefen. Für die Behandlung allgemeinerer, insbesondere nicht-linearer PDEs, spielen Fundamentallösungen keine Rolle. Insbesondere erweist sich auch der Distributionenraum $\mathcal{D}'$ als ungeeignet (zu gross). Im nächsten Abschnitt lernen wir einen weiteren Funktionenraum kennen (der den Funktionenraum C^2, in dem wir die klassischen Lösungen gesucht haben, umfasst, der aber kleiner ist, als der grosse Distributionenraum $\mathcal{D}'$) und der sich besser zur Untersuchung von Randwertproblemen für lineare und nichtlineare PDEs 2. Ordnung eignet.

2.2 Schwache Ableitungen und Sobolev-Räume

Für die Untersuchung von Randwertproblemen für lineare und nicht-lineare PDEs 2. Ordnung der allgemeinen Form

$$-\operatorname{div}A(x,u,Du)+\Phi(x,u,Du)=f \qquad \text{in } \Omega$$

ist es notwendig sich auf Funktionenräume zu beschränken, deren Elemente u reguläre distributionnelle erste Ableitungen D_iu besitzen, damit die Ausdrücke $A(x,u,Du)$ bzw. $\Phi(x,u,Du)$ sinnvoll definiert werden können.

Definition 2.5
Sei $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.
Eine Funktion $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ heisst *schwache partielle D^α-Ableitung von u*, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ ein Multiindex, wenn gilt:

$$(D^\alpha T_u)(\varphi) = \int_\Omega v(x)\varphi(x)\,dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}'(\Omega),$$

d.h. die T_u besitzt eine reguläre distributionnelle Ableitung $D^\alpha T_u$, die von v erzeugt ist.
Man schreibt dann kurz: $D^\alpha u = v$.

Bemerkung: Die schwache partielle Ableitung ist eindeutig bestimmt, d.h. wenn $v, w \in L^1_{loc}(\Omega)$ schwache partielle D^α-Ableitungen von u, dann ist $v = w$ fast überall auf Ω. Dies folgt aus dem folgenden Fundamentallemma der Variationsrechnung.

Lemma 2.1
Sei $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.
Wenn

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}'(\Omega),$$

dann gilt

$$f(x) = 0 \qquad \text{für fast alle } x \in \Omega.$$

Beweis:
Idee: Für eine beliebige kompakte Menge $K \subset \Omega$, konstruieren wir eine Folge $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{D}(\Omega)$ mit den folgenden Eigenschaften:

1) $\varphi_n \to \chi_K \mathrm{sign}_0(f) =: s_K(x)$ fast überall auf Ω (hierbei ist $\mathrm{sign}_0(r) = 1$, wenn $r > 0$, $= 0$ für $r = 0$ und $= -1$, wenn $r < 0$)
2) $|\varphi_n| \leq 1$ fast überall auf $K_n := \{x \in \Omega;\ \mathrm{dist}(x, K) \leq \frac{1}{n}\}$
3) $\varphi = 0$ fast überall auf $\Omega \setminus K_n$.

Mit $\varphi = \varphi_n$ folgt dann, mit Hilfe des Satzes der dominierten Konvergenz von Lebesgue, für $n \to \infty$,

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f(x)\varphi_n(x)\,dx = \int_K |f(x)|\,dx,$$

und damit $f = 0$ fast überall auf K. Da $K \subset \Omega$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung.
Die Konstruktion der approximierenden Folge $(\varphi_n)_n$ (d.h. die Regularisierung der L^1_{loc}-Funktion $\chi_K \mathrm{sign}_0(f)$) erfolgt mit Hilfe einer Faltung (“Konvolution„) mit einem Mittelungskern (“mollifier„). Dazu sei

$$\varrho(x) := \begin{cases} Ce^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & , |x| < 1 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases},$$

wobei die Konstante C so gewählt sei, dass $\int_{\mathbb{R}^N} \varrho(x)\,dx = 1$.

Definiere dann, für $n \in \mathbb{N}$,

$$\varrho_n(x) := n^N \varrho(nx), \qquad x \in \mathbb{R}^N.$$

Die gewünschte Folge φ_n erhält man nun durch Konvolution von φ_n mit $s_K(x)$:

$$\varphi_n(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \varrho_n(x-y) s_K(y)\, dy, \qquad x \in \Omega.$$

Es ist klar, dass die Folge $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ und die Punkte 1) und 2) erfüllt. Ausserdem gilt

$$\begin{aligned}
|\varphi_n(x) - s_K(x)| \quad &= \quad |\int_{\mathbb{R}^N} \varrho_n(x-y)(s_K(y) - s_K(x))\, dy| \\
&\leq \quad \int_{\mathbb{R}^N} \varrho_n(x-y)|s_K(y) - s_K(x)|\, dy \\
&= \quad Cn^N \int_{B_{1/n}(x)} \underbrace{\varrho(n(x-y))}_{\leq 1} |s_K(y) - s_K(x)|\, dy \\
&\leq \quad Cn^N \int_{B_{1/n}(x)} |s_K(y) - s_K(x)|\, dy \\
&\to_{n\to\infty} \quad 0
\end{aligned}$$

fast überall in Ω [3].

□

Beispiel (Schwache Ableitungen)

1) Die Funktion $u(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$, besitzt die schwache Ableitung $u' = H$, $H(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$.

2) Die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung $\Phi_N = \frac{1}{(N-2)\omega_N} \frac{1}{|x|^{N-2}}$, $N \geq 3$, besitzt die schwachen partiellen Ableitungen $D_i\Phi_N(x) = -(N-2)\frac{x_i}{|x|^N}$, $i = 1, \dots, N$.

Definition 2.6 (Sobolev-Räume $W^{1,p}$)
Sei $1 \leq p < \infty$. Dann bezeichnet $W^{1,p}(\Omega)$ den Funktionenraum aller $v \in L^p(\Omega)$, die für alle $i = 1, \dots, N$ schwache Ableitungen $D_i v$ besitzen und $D_i v \in L^p(\Omega)$ für alle $i = 1, \dots, N$.
$W^{1,p}(\Omega)$ wird als Sobolev-Raum bezeichnet.

Notation: Für $p = 2$ schreibt man oft $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.
Im Gegensatz zu den Distributionenräumen und dem Raum der Testfunktionen können Sobolev-Räume geeignet normiert worden.

[3] Erinnerung : Lebesgue'scher Satz: Falls $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, dann: $\frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{B_r(x_0)} |f(x) - f(x_0)|\, dx \to 0$ für fast alle $x_0 \in \Omega$, und jeder solche Punkt x_0 heisst „Lebesguepunkt" von f.

Satz 2.1 1) Auf $W^{1,p}(\Omega)$ wird durch

$$\|v\|_{1,p} = (\int_\Omega |v(x)|^p\,dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega |D_i v(x)|^p\,dx)^{1/p}, \quad v \in W^{1,p}(\Omega),$$

eine Norm definiert.
$(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$ ist ein Banachraum.

2) Für $p = 2$ wird durch

$$(v, w)_{1,2} = \int_\Omega v(x)w(x)\,dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega D_i v(x) D_i w(x)\,dx, \quad v, w \in H^1(\Omega),$$

ein Skalarprodukt in $H^1(\Omega)$ definiert, das die $\|\cdot\|_{1,2}$-Norm erzeugt.
$(H^1(\Omega), (\cdot,\cdot)_{1,2})$ ist somit ein Hilbertraum.

Beweis:
$\|\cdot\|_{1,p}$ Norm und $(\cdot,\cdot)_{1,2}$ Skalarprodukt: als Übung zum Selberrechnen.
Wir zeigen nur, dass $W^{1,p}(\Omega)$ unter der Norm $\|\cdot\|_{1,p}$ vollständig ist. Betrachte dazu eine Cauchy-Folge $(u_n)_n$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Aufgrund der Definition der $\|\cdot\|_{1,p}$-Norm folgt dann sofort, dass $(u_n)_n$ und sämtliche Folgen der partiellen Ableitungen $(D_i u_n)_n$ Cauchy-Folgen in $L^p(\Omega)$ (ausgestattet mit der üblichen L^p-Norm $\|v\|_p = (\int_\Omega |v(x)|^p\,dx)^{1/p}$) sind. Da $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ vollständig ist, existieren $u, z_1, \ldots, z_N \in L^p(\Omega)$ mit

$$u_n \to u \qquad \text{in } L^p(\Omega),$$

$$D_i u_n \to z_i \qquad \text{in } L^p(\Omega), \forall i = 1, \ldots, N.$$

Wir müssen zeigen, dass $z_i = D_i u$, schwache partielle i-te Ableitung von u, für alle $i = 1, \ldots, N$. Sei dazu $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, i beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_\Omega z_i(x)\varphi(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega D_i u_n(x)\varphi(x)\,dx \\ &= -\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n(x) D_i\varphi(x)\,dx \\ &= -\int_\Omega u(x) D_i\varphi(x)\,dx,\end{aligned}$$

und somit $z_i = D_i u$. Folglich ist $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und die Konvergenz von $u_n \to u$ in der $\|\cdot\|_{1,p}$-Norm ist auch klar. □

Bemerkungen :

1.) Analog kann, für alle $k \in \mathbb{N}$, $1 \le p < \infty$, der Sobolev-Raum höherer Ordnung $W^{k,p}(\Omega)$ definiert werden als Raum der Funktionen $v \in L^p(\Omega)$, die schwache partielle Ableitungen bis zur Ordnung k besitzen und alle diese Ableitungen selbst wieder zu $L^p(\Omega)$ gehören. Ausgestattet mit der Norm

$$\|v\|_{k,p} = (\|u\|_p^p + \sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|_p^p)^{1/p}$$

ist der Raum $W^{k,p}(\Omega)$ wieder ein Banachraum.

Da wir im weiteren nur PDEs 2. Ordnung untersuchen werden, werden die $W^{k,p}$-Räume höherer Ordnung keine Rolle spielen.
2.) Gelegentlich werden wir die lokalen Funktionenräume $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ benutzen, die definiert sind als die Menge der $L^p_{loc}(\Omega)$-Funktionen, die schwache partielle erste Ableitungen in $L^p_{loc}(\Omega)$ besitzen.

Beispiel (Sobolev-Funktionen)

1) Die Fundamentallösung $\Phi_N = \frac{1}{(N-2)\omega_N} \frac{1}{|x|^{N-2}}$, $N \geq 3$, der Laplace-Gleichung ist Element von $W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ (und sogar von $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ für alle $1 \leq p < \frac{N}{N-1}$, wie man sich leicht überlegt).

2) Die Funktion $u(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$ ist Element von $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R})$ für alle $1 \leq p < \infty$.

Da wir Randwertprobleme untersuchen wollen, beispielsweise die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von PDEs der Form

$$-\operatorname{div} A(x,u,Du) + \Phi(x,u,Du) = f \qquad \text{in } \Omega,$$

die die zusätzliche homogene Dirichlet-Randbedingung

$$u = 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega$$

erfüllen, stellt sich die Frage nach den Werten einer Sobolev-Funktion $u \in W^{1,p}(\Omega)$ auf dem Rand des Gebietes $\partial\Omega$. Da u nur in $L^p(\Omega)$ liegt (und schwache Ableitungen in $L^p(\Omega)$ besitzt), ist u a priori nur fast überall definiert. Tatsächlich sind die Elemente von $W^{1,p}(\Omega)$ (genauso wie die Elemente des Raumes L^p) Äquivalenzklassen von Funktionen, die fast überall übereinstimmen. Da der Rand $\partial\Omega$ eine N-dimensionale Lebesgue-Nullmenge ist, macht es augenscheinlich keinen Sinn von den Werten einer $W^{1,p}$-Funktion auf dem Rand zu sprechen. Einen Ausweg aus dem Problem bietet die Einführung folgenden Unterraumes von $W^{1,p}(\Omega)$:

Definition 2.7
Es bezeichnet $W^{1,p}_0(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,p}}$ den Teilraum der Funktionen $u \in W^{1,p}(\Omega)$, die durch eine Folge von Testfunktionen $(u_n)_n \subset \mathcal{D}(\Omega)$ in der $\|\cdot\|_{1,p}$-Norm approximiert werden können.

Bemerkung: Wenn $\Omega = \mathbb{R}^N$, dann ist $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N)$. Für beschränkte offene Mengen Ω jedoch ist $W^{1,p}_0(\Omega)$ i.a. strikt kleiner als $W^{1,p}(\Omega)$. Da Elemente in $W^{1,p}_0(\Omega)$ durch eine Folge von Testfunktionen, die auf dem Rand $\partial\Omega$ verschwinden, approximiert werden kann, ist es natürlich, die Elemente des Raumes $W^{1,p}_0(\Omega)$ als die Sobolev-Funktionen zu betrachten, die in einem verallgemeinerten Sinne auf dem Rand verschwinden. Diese Aussage wird später noch präzisiert werden.

Um weitere nützliche Eigenschaften der Sobolev-Räume und ihrer Elemente herzuleiten, benötigen wir einige funktionalanalytische Hilfsmittel:

Definition 2.8
Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume.

1) Falls eine lineare injektive Abbildung $j : X \to Y$ existiert, dann heisst X *in Y eingebettet.*

2) Falls die injektive lineare Abbildung aus 1) stetig ist, d.h. ein $c > 0$ existiert mit

$$\|j(x)\|_Y \leq c\|x\|_X \qquad \text{für alle } x \in X,$$

dann heisst X *stetig in Y eingebettet.*
Notation: $X \hookrightarrow Y$

3) Falls j aus 1) stetig und ausserdem beschränkte Teilmengen von X in relativ kompakte Teilmengen von Y überführt, d.h. wenn für jede in X beschränkte Folge $(x_n)_n$ die Folge $(j(x_n)_n$ eine in Y konvergente Teilfolge enthält, dann heisst X *kompakt eingebettet in* Y.
Notation: $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$.

Bemerkung : Falls X in Y eingebettet ist, kann X algebraisch als Teilraum von Y aufgefasst werden, indem man jedes Element $x \in X$ mit dem zugehörigen Element $j(x) \in Y$ identifiziert.
Falls X sogar stetig eingebettet, kann X auch im topologischen Sinne als Teilraum von Y angesehen werden: X „erbt“ quasi die topologischen Eigenschaften von Y. Ist etwa Y separabel [4] oder reflexiv [5], so gilt gleiches auch für X.
Wir werden sehen, dass der Sobolev-Raum $W^{1,p}(\Omega)$ in verschiedene uns bereits bekannte Banachräume eingebettet werden kann. Ein einfaches Beispiel ist etwa die Einbettung in den Produktraum $L^p(\Omega)^{N+1}$ mittels folgender linearen injektiven Abbildung:

$$\begin{array}{lll} j: & W^{1,p}(\Omega) & \to L^p(\Omega)^{N+1} \\ & u & \mapsto (u, D_1 u, \ldots, D_N u) \end{array}.$$

Der Produktraum $L^p(\Omega)^{N+1}$ ausgestattet mit der Norm

$$\|(v_1, \ldots, v_{N+1})\| = (\sum_{i=1}^{N+1} \|v_i\|_p^p)^{1/p}$$

(oder der äquivalenten Norm: $\|(v_1, \ldots, v_{N+1})\| = \sum_{i=1}^{N+1} \|v_i\|_p$) ist ein Banachraum. Es ist auch klar, dass die Abbildung j stetig ist (falls $L^p(\Omega)^{N+1}$ mit der ersten Norm ausgestattet ist, ist j sogar eine Isometrie: $\|j(u)\| = \|u\|_{1,p}$ für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$). Aus der Separabilität des Raumes $L^p(\Omega)$ und der daraus resultierenden Separabilität des Produktraumes $L^p(\Omega)^{N+1}$ folgt mit Hilfe der obigen stetigen Einbettung sofort

[4] Erinnerung: Ein Banachraum Y heisst *separabel*, wenn es eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.
[5] Erinnerung: Ein Banachraum Y heisst reflexiv, wenn $Y = Y''$, wobei Y'' der Bidualraum von Y, siehe etwa H. Brézis, „Analyse fonctionnelle“, W. Rudin, „Functional Analysis“, etc.

Satz 2.2
Für alle $1 \leq p < \infty$ ist der Banachraum $W^{1,p}(\Omega)$ separabel.

Wir haben bereits am Beispiel der Fundamentallösung der Laplace-Gleichung Φ_N gesehen, dass $W^{1,p}$-Funktionen im allgemeinen nicht stetig sind. Eine Ausnahme bildet der 1-dimensionale Fall:

Satz 2.3
Sei $u \in W^{1,p}(I)$, $I =]a,b[$ echtes Intervall in $\mathbb{R}$. Dann existiert eine absolut stetige Funktion $\tilde{u} : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$u = \tilde{u} \text{ fast überall auf } I,$$

und es existiert eine nur von a, b und p abhängige Konstante $C > 0$ so, dass

$$\|\tilde{u}\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |\tilde{u}(x)| \leq C\|u\|_{1,p}.$$

Mit anderen Worten:

$$W^{1,p}(I) \hookrightarrow C([a,b]).$$

Beweis:
Für $x_0 \in [a,b]$ definieren wir die Funktion

$$v(x) = \int_{x_0}^{x} u'(s)\, ds, \quad x \in [a,b].$$

Da die schwache Ableitung $u' \in L^p(a,b) \subset L^1(a,b)$, ist die so definierte Funktion v absolut stetig [6], fast überall differenzierbar und die klassische Ableitung v' stimmt fast überall mit der schwachen Ableitung u' überein.
Es folgt, dass, für alle $\varphi \in \mathcal{D}(I)$,

$$\begin{aligned}
\int_a^b v(x)\varphi'(x)\, dx &= -\int_a^b v'(x)\varphi(x)\, dx \quad \text{(part. Int.)} \\
&= -\int_a^b u'(x)\varphi(x)\, dx \quad (u' = v' \text{ f. ü.}) \\
&= \int_a^b u(x)\varphi'(x)\, dx. \quad \text{(Def. d.schwachen Ableitung)}
\end{aligned}$$

Somit ist

$$\int_a^b (v(x) - u(x))\varphi'(x)\, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I),$$

woraus folgt (Übungsaufgabe), dass $u(x) = v(x) + const$ fast überall auf I. Damit ist gezeigt, dass u fast überall gleich einer absolut stetigen Funktion $\tilde{u} : [a,b] \to \mathbb{R}$ auf I ist, $\tilde{u} = v + const$.

[6] Erinnerung: Eine Funktion $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ heisst absolut stetig, wenn gilt: $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ so, dass für alle endlichen Familien von disjunkten Teilintervallen von $[a,b]$, $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$, mit Gesamtlänge kleiner als δ: $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)$, gilt: $\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon$.
Es gelten die Implikationen: u Lipschitz stetig $\Rightarrow$ u absolut stetig $\Rightarrow$ u stetig.

Es bleibt die Abschätzung zu zeigen. Dazu bemerken wir, dass nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ein $x_0 \in [a, b]$ existiert so, dass

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \tilde{u}(x)\,dx = \tilde{u}(x_0).$$

Mit dieser Wahl von x_0 folgt, für alle $x \in [a, b]$,

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(x) &= \tilde{u}(x_0) + \int_{x_0}^x \tilde{u}'(s)\,ds \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b \tilde{u}(s)\,ds + \int_{x_0}^x \tilde{u}'(s)\,ds
\end{aligned}$$

und somit, mit Hilfe der Hölder'schen Ungleichung, die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|\tilde{u}(x)| &\leq \frac{1}{b-a}\Big(\int_a^b 1\,ds\Big)^{1/p'}\Big(\int_a^b |\tilde{u}|^p\,ds\Big)^{1/p} + \Big(\int_a^b 1\,ds\Big)^{1/p'}\Big(\int_a^b |\tilde{u}'(s)|^p\,ds\Big)^{1/p} \\
&\leq (b-a)^{-1/p}\|u\|_{1,p} + (b-a)^{1/p'}\|u\|_{1,p} \\
&= C\|u\|_{1,p}
\end{aligned}$$

mit einer nur von a, b und p abhängigen Konstanten C. $\square$

Bemerkung: Für höhere Raumdimensionen $N > 1$ kann man noch zeigen, dass $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$, wenn $p > N$ und $\Omega = \mathbb{R}^N$, ein Halbraum oder ein beschränktes glatt berandetes Gebiet.

2.2.1 Approximation durch glatte Funktionen und Fortsetzungssatz

Um weitere Eigenschaften von $W^{1,p}$-Funktionen (in beliebigen Raumdimensionen) herleiten zu können, benötigt man die Tatsache, dass diese Funktionen durch glatte Funktionen approximiert werden können. Wir zeigen zunächst, dass $W^{1,p}$-Funktionen stets lokal durch C^∞-Funktionen approximiert werden können:

Satz 2.4
Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $1 \leq p < \infty$. Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Dann existiert eine Folge $(u_n)_n \subset C^\infty(\Omega)$ mit der Eigenschaft:

$$\begin{cases} u_n \to u & \text{in } L^p(\Omega) \\ D_i u_n \to D_i u & \text{in } L^p(\omega), \forall \text{ offenen Mengen } \omega \subset\subset \Omega, \forall i = 1, \dots, N. \end{cases}$$

Hierbei bezeichnet die Notation $\omega \subset\subset \Omega$, dass ω kompakt in Ω enthalten ist, d.h. dass auch der Abschluss $\overline{\omega} \subset \Omega$.

Beweis:
Die Approximation erfolgt durch Regularisierung der Funktion u, bzw. ihrer Fortsetzung auf $\mathbb{R}^N$:

$$\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x) & , x \in \Omega \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}.$$

Wir regularisieren dann $\overline{u}$ wie gehabt mit Hilfe einer Konvolution mit der Standardfolge von mollifiern $(\varrho_n)_n$ (siehe Beweis der Bemerkung über die Eindeutigkeit der schwachen Ableitung):

$$u_n(x) = \varrho_n * \overline{u}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \varrho_n(x-y)\overline{u}(y)\,dy.$$

Wie im Beweis der Bemerkung folgt, dass

$$u_n \to \overline{u} \qquad \text{fast überall auf } \mathbb{R}^N,$$

insbesondere also $u_n \to u$ f.ü. auf Ω.
Wäre $\overline{u}$ eine $C_c^1(\mathbb{R}^N)$-Funktion, dann würde die Regularisierungsfolge nicht nur f.ü., sondern sogar gleichmässig auf $\mathbb{R}^N$ und in $L^p(\Omega)$ erfolgen. Diese Eigenschaft zusammen mit der Tatsache, dass $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^N)$ liegt, führt uns zu folgender Argumentation:
Für $\epsilon > 0$ wählen wir $u_\epsilon \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ mit $\|u_\epsilon - \overline{u}\|_p < \epsilon$. Dann folgt mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
\|u_n - \overline{u}\|_p &\leq \|u_n - \varrho_n * u_\epsilon\|_p + \|\varrho_n * u_\epsilon - u_\epsilon\|_p + \|u_\epsilon - \overline{u}\|_p \\
&= \|\varrho_n * (\overline{u} - u_\epsilon)\|_p + \|\varrho_n * u_\epsilon - u_\epsilon\|_p + \|u_\epsilon - \overline{u}\|_p \\
&\leq \|\overline{u} - u_\epsilon\|_p + \|\varrho_n * u_\epsilon - u_\epsilon\|_p + \|u_\epsilon - \overline{u}\|_p \\
&\leq 2\epsilon + \underbrace{\|\varrho_n * u_\epsilon - u_\epsilon\|_p}_{\to_{n\to\infty} 0}.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass $u_n \to \overline{u}$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$, und somit auch $u_n \to u$ in $L^p(\Omega)$.
Bei der obigen Abschätzung haben wir folgende Eigenschaft der Konvolution benutzt:

$$\text{wenn } g \in L^p(\mathbb{R}^N),\ \text{dann } \varrho_n * g \in L^p(\mathbb{R}^N) \text{ und } \|\varrho_n * g\|_p \leq \|g\|_p.$$

Es bleibt die Konvergenz der Ableitungen zu untersuchen. Sei dazu $\omega \subset\subset \Omega$. Sei $\delta = \operatorname{dist}(\omega, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)$. Da $\delta > 0$, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq n_0$, für alle $x \in \omega$, die Funktionen $y \mapsto \varrho_n(x-y)$ ihren Träger, die Menge $B_{1/n}(x)$, kompakt in Ω haben, d.h. jede Funktion $y \mapsto \varrho_n(x-y) \in \mathcal{D}(\Omega)$. Es folgt, dass für alle $x \in \omega$, $n \geq n_0$, für $i \in \{1,\dots,N\}$ beliebig,

$$\begin{aligned}
D_i(\varrho_n * \overline{u}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\int_{\mathbb{R}^N} \varrho_n(x-y)\overline{u}(y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial}{\partial x_i}(\varrho_n(x-y))\overline{u}(y)\,dy \\
&= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(\varrho_n(x-y))u(y)\,dy \quad (\operatorname{supp} \varrho_n(x-\cdot) \subset \Omega) \\
&= -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y_i}\varrho_n(x-y))u(y)\,dy \quad (\varrho_n \text{ symmetrisch}) \\
&= \int_\Omega \varrho_n(x-y) D_i u(y)\,dy \quad (\text{Def. d. schwachen Ableitung}) \\
&= \varrho_n * D_i u(x).
\end{aligned}$$

Da $D_i u \in L^p(\Omega)$, folgt aus dem 1. Schritt, dass $\varrho_n * D_i u \to D_i u$ in $L^p(\Omega)$. Da $D_i(\varrho_n * \overline{u})(x) = \varrho_n * D_i u(x)$ für alle $x \in \omega$, folgt dass $D_i(\varrho_n * \overline{u}) \to D_i u$ in $L^p(\omega)$. $\square$

Das obige Approximationsresultat kann verbessert werden. Der folgende Satz über die Möglichkeit der globalen Approximation von $W^{1,p}$-Funktionen durch C^∞-Funktionen geht auf Meyers und Serrin zurück.

Satz 2.5
Sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $1 \leq p < \infty$.
Dann gilt:

1) $W^{1,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ ist dicht in $W^{1,p}(\Omega)$, d.h. für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$ existiert eine Folge $(u_n)_n \subset W^{1,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$, so dass

$$u_n \to u \text{ in } L^p(\Omega), \quad D_i u_n \to D_i u \text{ in } L^p(\Omega), \forall i = 1, \ldots, N.$$

2) Wenn der Rand von Ω glatt ist, dann gilt: $C^\infty(\overline{\Omega})$ ist dicht in $W^{1,p}(\Omega)$.

Beweis:
siehe z.B. Evans, „Partial Differential Equations“ □

Ein weiteres wichtiges Resultat, das wir ohne Beweis zitieren wollen, ist der folgende Fortsetzungssatz:

Satz 2.6
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes glatt berandetes Gebiet, $N \geq 1$, $1 \leq p < \infty$. Sei V eine offene Menge mit $\Omega \subset\subset V \subset \mathbb{R}^N$.
Dann existiert eine Abbildung $E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ so, dass für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gilt:

1) $Eu = u$ fast überall auf Ω

2) $Eu = 0$ fast überall auf $\mathbb{R}^N \setminus V$

3) $\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ mit einer von u unabhängigen Konstante $C > 0$.

(Eigenschaft 3) besagt gerade, dass der Fortsetzungsoperator E eine stetige Abbildung ist.)

Beweis:
siehe z.B. Evans □

2.2.2 Kompakter Einbettungssatz und Poincaré'sche Ungleichung

Mit Hilfe der beiden Resultate zur Approximation und zur Fortsetzbarkeit von $W^{1,p}$-Funktionen können eine Reihe weiterer nützlicher Einbettungssätze für Sobolev-Räume hergeleitet werden. Wir beschränken uns hier auf folgenden nützlichen :

Satz 2.7 (Satz von Rellich)
Sei Ω ein beschränktes glattberandetes Gebiet im $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $1 \leq p < \infty$.
Dann gilt:

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega).$$

Bemerkung :
Kompakte Einbettungssätze wie der Satz von Rellich erweisen sich insbesondere als sehr nützlich bei der Behandlung von (nicht)linearen elliptischen Randwertproblemen. Oft versucht man die Existenz einer Lösung $u \in X$ einer Differentialgleichung $Lu = f$, L ein Differentialoperator, X ein geeigneter Funktionenraum, $f \in Y$, Y ein weiterer Funktionenraum, zu zeigen, indem man den Differentialoperator oder die rechte Seite approximiert. Ist z. B. bereits die Existenz einer Lösung für „glatte" rechte Seiten bekannt, so ist es natürlich, zu versuchen, die gegebene rechte Seite $f \in Y$ durch solche glatteren Funktionen f_n zu approximieren, und zu zeigen, dass die zugehörigen Lösungen u_n von $Lu_n = f_n$ dann in einem geeigneten Sinn gegen eine Lösung u von $Lu = f$ konvergieren. Oft gelingt es dabei jedoch nicht, die Konvergenz in dem Lösungsraum X selbst zu zeigen. Häufig ist es aber möglich, zu zeigen, dass die Folge $(u_n)_n$ zumindestens beschränkt in X ist. Wenn X kompakt in einem weiteren Banachraum Z eingebettet ist, reicht manchmal die daraus resultierende Konvergenz (einer Teilfolge von) u_n gegen ein Element u in Z aus, um zeigen zu können, dass u schon in X liegt und die Gleichung $Lu = f$ erfüllt.

Beweis:
[Satz von Rellich]
Sei $\mathcal{F}$ eine beschränkte Teilmenge in $W^{1,p}(\Omega)$. Aufgrund der Definition der $W^{1,p}$-Norm ist $\mathcal{F}$ auch offensichtlich beschränkt in $L^p(\Omega)$.
1. Schritt: Um zu zeigen, dass $\mathcal{F}$ relativ kompakt in $L^p(\Omega)$, benutzen wir das folgende

Kompaktheitskriterium in L^p (Fréchet-Kolmogorov)
Sei Ω eine beliebige offene Teilmenge in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $1 \leq p < \infty$.
Sei $\mathcal{F}$ eine beschränkte Teilmenge in $L^p(\Omega)$ mit den folgenden Eigenschaften:

i) $\forall \epsilon > 0 \; \forall \omega \subset\subset \Omega \; \exists \, \delta > 0$ $(\delta < \text{dist } (\omega, \mathbb{R}^N \setminus \Omega))$ so, dass

$$\int_\omega |f(x+h) - f(x)|^p \, dx < \epsilon \qquad \forall h \in \mathbb{R}^N \text{ mit } |h| < \delta, \; \forall f \in \mathcal{F}$$

ii) $\forall \epsilon > 0 \; \exists \omega \subset\subset \Omega$ so, dass

$$\int_{\Omega \setminus \omega} |f(x)|^p \, dx < \epsilon \qquad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Dann ist $\mathcal{F}$ relativ kompakt in $L^p(\Omega)$.

Beweis:
siehe z.B. H. Brézis, „Analyse fonctionnelle" □

Bemerkung : Bedingung i) ist eine Form von „gleichgradiger Integrierbarkeit" (vgl. mit der Bedingung der gleichgradigen Stetigkeit als Voraussetzung im Satz von Arzela-Ascoli). Tatsächlich kann man den Satz von Fréchet-Kolmogorov auf den Satz von Arzela-Ascoli zurückführen (siehe Brézis).

2. Schritt: Wir können o.B.d.A. annehmen, dass eine offene Menge $\omega \subset\subset \Omega$ existiert, so dass gilt: $f = 0$ fast überall auf $\Omega \setminus \omega$.

In der Tat: Sind $V, \tilde{\Omega}$ beschränkte glattberandete Gebiete mit $\Omega \subset\subset V \subset\subset \tilde{\Omega}$, dann besitzt nach dem Fortsetzungssatz jedes Elements $f \in \mathcal{F}$ eine Fortsetzung $Ef \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, und somit insbesondere auch eine Fortsetzung $\tilde{f} \in W^{1,p}(\tilde{\Omega})$ (wähle dazu $\tilde{f} = Ef_{|\tilde{\Omega}}$, die Restriktion von Ef auf $\tilde{\Omega}$)), die ausserhalb von V verschwindet. Ausserdem ist, nach dem Fortsetzungssatz, auch die Menge der Fortsetzungen $\tilde{\mathcal{F}} := \{\tilde{f};\ \tilde{f} = Ef_{|\tilde{\Omega}}\}$ beschränkt in $W^{1,p}(\tilde{\Omega})$. Ersetzen wir nun Ω durch $\tilde{\Omega}$, die Familie $\mathcal{F}$ durch die Familie $\tilde{\mathcal{F}}$, dann ist $\tilde{\mathcal{F}}$ beschränkt und zusätzlich verschwindet jedes Element $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{F}}$ ausserhalb von V. Da die relative Kompaktheit von $\tilde{\mathcal{F}}$ in $L^p(\tilde{\Omega})$ die relative Kompaktheit von $\mathcal{F}$ in $L^p(\Omega)$ impliziert, folgt Behauptung von Schritt 2).
Insbesondere können wir damit annehmen, dass unsere Familie $\mathcal{F}$ die Bedingung ii) des Kompaktheitskriteriums mit $\omega = V$ erfüllt.

3. Schritt: Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{F}$ die gleichgradige Integrierbarkeitsbedingung i) erfüllt. Dies folgt aber unmittelbar aus der folgenden Behauptung:

Lemma 2.2
$\forall f \in W^{1,p}(\Omega)$, $\forall \omega \subset\subset \Omega$, $0 < \delta <$ dist $(\omega, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)$ gilt:

$$\int_\omega |f(x+h) - f(x)|^p\,dx \le |h|^p \int_\Omega |Df(x)|^p\,dx \qquad \forall h \in \mathbb{R}^N, |h| < \delta.$$

Beweis:
(Lemma)
Da nach dem Approximationssatz von Meyers/Serrin $W^{1,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ dicht in $W^{1,p}(\Omega)$ liegt, reicht es zu zeigen, dass die obige Ungleichung für glatte Funktionen $f \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ gilt. Sei f eine solche glatte Funktion, $\omega \subset\subset \Omega$, $x \in \omega$ und $h \in \mathbb{R}^N$ mit $|h| \le \delta <$ dist $(\omega, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)$. Definiere dann, für $|t| < \frac{\delta}{|h|}$, $v(t) = u(x+th)$. Offensichtlich ist v differenzierbar und

$$v'(t) = \nabla f(x+th) \cdot h \qquad \forall |t| < \frac{\delta}{|h|}$$

und es folgt, dass

$$f(x+h) - f(x) = v(1) - v(0) = \int_0^1 v'(t)\,dt = \int_0^1 h \cdot \nabla f(x+th)\,dt.$$

Mit Hilfe der Jensen'schen Ungleichung erhalten wir so

$$|f(x+h) - f(x)|^p \le |h|^p \left(\int_0^1 |\nabla f(x+th)|\,dt\right)^p \le |h|^p \int_0^1 |\nabla f(x+th)|^p\,dt.$$

Integration in x über ω und Anwendung des Satzes von Fubini ergibt

$$\begin{aligned}
\int_\omega |f(x+h)-f(x)|^p\,dx &\leq |h|^p \int_\omega \int_0^1 |\nabla f(x+th)|^p\,dt\,dx \\
&= |h|^p \int_0^1 \int_\omega |\nabla f(x+th)|^p\,dx\,dt \\
&= |h|^p \int_0^1 \int_{\omega+th} |\nabla f(y)|^p\,dy\,dt \\
&\leq |h|^p \int_0^1 \int_\Omega |\nabla f(y)|^p\,dy\,dt \\
&= |h|^p \int_\Omega |\nabla f(y)|^p\,dy
\end{aligned}$$

und das Lemma ist bewiesen. □

Es ist nun klar, dass $\mathcal{F}$ ii) erfüllt: Für $\epsilon > 0$, $\omega \subset\subset \Omega$ kann etwa $\delta = \min(\mathrm{dist}(\omega, \mathbb{R}^N \setminus \Omega), \epsilon/M)$ mit $M > 0$, so dass $\|f\|_{1,p} \leq M$ für alle $f \in \mathcal{F}$, gewählt werden. □

Wir werden nun noch einmal zu dem Raum $W_0^{1,p}(\Omega)$ zurückkehren, der im folgenden Kapitel zur Behandlung von Randwertproblemen für elliptische PDEs eine besondere Rolle spielen wird. Wie bereits bemerkt, besteht $W_0^{1,p}(\Omega)$ aus den $W^{1,p}$-Funktionen auf Ω, die in einem gewissen schwachen Sinn auf dem Rand $\partial\Omega$ verschwinden. Genauer gilt folgender

Satz 2.8
Sei Ω ein beschränktes glatt berandetes Gebiet im $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $1 \leq p < \infty$.
Sei $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:

i) $u = 0$ auf $\partial\Omega$

ii) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Beweis:
Fall $N = 1$ in der Übung; allgemeiner Fall: siehe Brézis, Evans, … □

Von besonderer Bedeutung ist auch Poincaré'sche Ungleichung, die zeigt, dass die Norm einer $W_0^{1,p}$-Funktion allein durch ihre Ableitungen bestimmt ist:

Satz 2.9
Sei Ω eine beschränkte, offene Menge in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $1 \leq p < \infty$. Dann existiert eine Konstante C, die nur von Ω und p abhängt, so dass

$$\int_\Omega |u(x)|^p\,dx \leq C \sum_{i=1}^N \int_\Omega |D_i u(x)|^p\,dx \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Insbesondere definiert $u \mapsto \|u\| = \sum_{i=1}^N \int_\Omega |D_i u(x)|^p\,dx$ eine Norm auf $W_0^{1,p}(\Omega)$, die zur $\|\cdot\|_{1,p}$-Norm äquivalent ist.

Beweis:
Es reicht zu zeigen, dass eine (nur von Ω und p abhängige) Konstante $C > 0$

existiert, so dass die Ungleichung für alle $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt. Da $\mathcal{D}(\Omega)$ dicht in $W_0^{1,p}(\Omega)$ folgt durch Approximation, dass die Ungleichung für alle $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ gilt.
Sei also $u \in \mathcal{D}(\Omega)$. Da Ω beschränkt ist, existiert ein $d > 0$ so, dass $\Omega \subset \{x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N;\ |x_1| > d\}$ (wir hätten hier natürlich auch die Beschränktheit bzgl. einer anderen Koordinate ausnutzen können).
Wir nehmen nun vorübergehend an, dass $p > 1$.
Mit partieller Integration erhalten wir:

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u(x)|^p\,dx &= \int_\Omega 1 \cdot |u(x)|^p\,dx\\ &= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_1} x_1 \cdot |u(x)|^p\,dx\\ &= \int_{\partial\Omega} x_1 \underbrace{|u(x)|^p}_{=0}\,d\sigma(x) - \int_\Omega x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}|u(x)|^p\,dx.\end{aligned}$$

Da $p > 1$ ist die Funktion $x \mapsto |u(x)|^p$ stetig differenzierbar auf Ω mit $\frac{\partial}{\partial x_1}|u(x)|^p = p|u(x)|^{p-1}\operatorname{sign}_0(u(x))\frac{\partial}{\partial x_1}u(x)$. Somit folgt mit Hilfe der Hölder'schen Ungleichung

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u(x)|^p\,dx &= \int_\Omega x_1 p|u(x)|^{p-1}\operatorname{sign}_0(u(x))\frac{\partial}{\partial x_1}u(x)\,dx\\ &\le pd\int_\Omega |u(x)|^{p-1}\left|\frac{\partial}{\partial x_1}u(x)\right|\,dx\\ &\le pd\left(\int_\Omega |u(x)|^p\,dx\right)^{1/p'}\left(\int_\Omega \left|\frac{\partial}{\partial x_1}u(x)\right|^p\,dx\right)^{1/p}\,dx\\ &\le pd\left(\int_\Omega |u(x)|^p\,dx\right)^{1/p'}\left(\sum_{i=1}^N\int_\Omega \left|\frac{\partial}{\partial x_i}u(x)\right|^p\,dx\right)^{1/p}\,dx.\end{aligned}$$

Division durch $\left(\int_\Omega |u(x)|^p\,dx\right)^{1/p'}$ und Erheben zur p-ten Potenz führt zur gesuchten Ungleichung mit der Konstanten $C = (pd)^p$.
Die Ungleichung im Fall $p = 1$ erhält man durch Übergang zum Grenzwert in der Ungleichung für $p > 1$ mit $p \to 1$ (wobei diese Argumentation im Fall $p = 1$ die Konstante $C = d$ liefert). □

Bemerkungen:
1.) Die Poincaré'sche Ungleichung gilt i.a. nicht für beliebige $W^{1,p}$-Funktionen (Beispiel: $u \equiv 1$). Sie gilt aber zum Beispiel auch, für die Teilmenge all der Funktionen u in $W^{1,p}(\Omega)$, für die $\int_\Omega u(x)\,dx = 0$ ist(siehe Evans).
2.) Die Poincaré'sche Ungleichung gilt i.a. nicht für unbeschränkte Gebiete Ω. Insbesondere gilt sie nicht für $\Omega = \mathbb{R}^N$. Beispiel $N = 1$, $p = 1$: Beweis durch Widerspruch: angenommen, die Poincaré'sche Ungleichung gilt mit einer Konstanten $C > 0$. Betrachte dann die Funktionen $u_n(x) = \min(1, \max((n + 1 - |x|, 0))$. Es gilt: $u_n \in W_0^{1,1}(\mathbb{R}) = W^{1,1}(\mathbb{R})$ und die Poincaré'sche Ungleichung mit $u = u_n$ würde lauten

$$2n + 1 = \int_\mathbb{R} |u_n(x)|\,dx \le C\int_\mathbb{R} |u_n'(x)|\,dx = 2.$$

Da n beliebig und C unabhängig von n, erhalten wir für $n \to \infty$ einen Widerspruch.

3.) Der obige Beweis zeigt aber, dass die Poincaré'sche Ungleichung auch für solche unbeschränkten offenen Mengen gilt, die wenigstens in einer Koordinatenrichtung beschränkt sind.

2.2.3 Dualräume und Sobolev-Räume

Wir wollen dieses Kapitel über Sobolev-Räume mit ein paar einführenden Bemerkungen über Dualräume von Banachräumen beenden.

Erinnerung: Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum. Dann bezeichnet man mit X' (oder X^*) die Menge der stetigen linearen Funktionale auf X, d.h. die Menge der linearen Abbildungen $\varphi : X \to \mathbb{R}$, für die eine Konstante $c > 0$ existiert so, dass $|\varphi(x)| \leq c\|x\|_X$ für alle $x \in X$. X' wird der *Dualraum von* X genannt.
Mit der üblichen punktweisen skalaren Multiplikation und punktweisen Addition von linearen Abbildungen wird X' zu einem linearen Raum. Der Raum X' wird mit der Norm (die sog. *duale Norm*):

$$\|\varphi\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|_X} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} |\varphi(x)|$$

zu einem Banachraum.
Notation: Oft schreibt man $< \varphi, x >$ oder auch $< \varphi, x >_{X',X}$ anstelle von $\varphi(x)$, dem Wert des Funktionals φ an der Stelle x. $< \cdot, \cdot >$ wird als *Dualitätsklammer* oder *duale Paarung* bezeichnet.
Da $(X', \|\cdot\|_{X'})$ selbst wieder ein Banachraum ist, kann die obige Konstruktion auch auf X' angewendet werden. So kann der Dualraum $(X')'$ von X' definiert werden, der wieder mit entsprechend definierter Norm ein Banachraum ist. Anstelle von $(X')'$ schreibt man kurz X'' und bezeichnet diesen Raum als Bidualraum von X.
Mit Hilfe der Kenntnis des Dualraumes (bzw. Bidualraumes) eines Banachraumes X können wichtige Erkenntnisse über den Banachraum X selbst gewonnen werden (beispielsweise ist X separabel, wenn X' separabel). Insbesondere kann mit Hilfe des Dualräumes ein neuer „schwacher" Konvergenzbegriff auf X eingeführt werden, der sich auch bei der Behandlung von PDEs als sehr nützlich erweisen wird (vergleiche mit der Bemerkung nach dem Satz von Rellich).
Wir kommen im Kapitel über nichtlineare Randwertprobleme auf die Bedeutung von Dualräumen und der schwachen Konvergenz zurück. An dieser Stelle wollen wir nur an den Satz von Riesz erinnern, der es erlaubt, den Dualraum eines Hilbertraums zu charakterisieren.

Satz 2.10 (Satz von Riesz)
Sei $(H, (\cdot,\cdot))$ ein Hilbertraum.
Dann gilt:
Für alle $\varphi \in H'$ existiert ein eindeutiges Element $f_\varphi \in H$ so, dass

$$< \varphi, v >= (f_\varphi, v) \qquad \forall v \in H.$$

Zudem gilt:

$$\|\varphi\|_{H'} = \|f_\varphi\|_H \qquad \forall \varphi \in H.$$

Mit anderen Worten: die Abbildung

$$\begin{array}{lll} j: & H' & \to H \\ & \varphi & \mapsto f_\varphi \end{array}$$

ist ein isometrischer Isomorhismus.

Bemerkung: Der Satz von Riesz erlaubt es uns, den Dualraum H' mit dem Raum H zu identifizieren.

Notation: Für $1 \leq p < \infty$ bezeichnen wir mit $W^{-1,p'}(\Omega)$ den Dualraum von $W_0^{1,p}(\Omega)$.
Für $p = 2$ bezeichnet man meist mit $H^{-1}(\Omega)$ den Dualraum von $H_0^1(\Omega)$.

Aus dem Satz von Riesz folgt nun unmittelbar

Satz 2.11
Sei $\varphi \in H^{-1}(\Omega)$. Dann existieren $f_0, f_1, \ldots, f_N \in L^2(\Omega)$ mit

$$< \varphi, v >= \int_\Omega f_0(x)v(x)\,dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega f_i(x) D_i v(x)\,dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Beweis:
Nach dem Satz von Riesz existiert ein eindeutiges Element $f_\varphi \in H_0^1(\Omega)$ so, dass für alle $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} < \varphi, v > &= (f_\varphi, v) \\ &= \int_\Omega f_\varphi(x)v(x)\,dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega D_i f_\varphi(x) D_i v(x)\,dx \end{aligned}$$

nach Definition des Skalarproduktes $(\cdot,\cdot)$ auf $H_0^1(\Omega)$.
Die Funktionen $f_0 := f_\varphi$, $f_i := D_i f_\varphi$, $i = 1, \ldots, N$ leisten also das Gewünschte. □

Bemerkung: Die Funktionen $f_0, f_1, \ldots, f_N$ sind - im Gegensatz zur Funktion f_φ - nicht eindeutig bestimmt. Das sieht man leicht am folgenden Beispiel: Das Nullelement $\varphi =$ in $H^{-1}(\Omega)$, $\Omega =]0,1[\times]0,1[$ lässt sich wie in Satz 2.11 mit $f_0 = f_1 = f_2 = 0$, aber auch mit $f_0 = 0, f_1(x,y) = y$ und $f_2(x,y) = x$ darstellen.

Bemerkung: Man kann in ähnlicher Weise auch die Elemente des Dualraumes $W^{-1,p'}(\Omega)$ von $W_0^{1,p}(\Omega)$ für $p \neq 2$ charakterisieren:

$$\forall \varphi \in W^{-1,p'}(\Omega) \quad \exists f_0, \ldots, f_N \in L^{p'}(\Omega) \quad \text{so, dass}$$

$$< \varphi, v >= \int_\Omega f_0(x)v(x)\,dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega f_i(x) D_i v(x)\,dx \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Dieses Resultat folgt aus dem Riesz'schen Darstellungssatz für den Dualraum eines L^p-Raumes [7] zusammen mit der isometrischen Einbettung

$$\begin{array}{lll} i: & W_0^{1,p}(\Omega) & \to L^p(\Omega)^{N+1} \\ & v & \mapsto (v, D_1 v, \dots, D_N v) \end{array}.$$

Für ein Element $\varphi \in W^{-1,p'}(\Omega)$ ist nämlich die Abbildung $T = \varphi \circ i^{-1}$ ein stetiges lineares Funktional auf dem abgeschlossenen linearen Teilraum $i(W_0^{1,p}(\Omega))$ von $L^p(\Omega)^{N+1}$, welches nach dem Satz von Hahn-Banach zu einem stetigen linearen Funktional $\overline{T}$ auf $L^p(\Omega)^{N+1}$ fortgesetzt werden kann. Nach dem Riesz'schen Satz existieren $f_0, \dots, f_N \in L^{p'}(\Omega)$ mit $\overline{T}(u) = \sum_{i=0}^N \int_\Omega f_i(x) u_i(x)\,dx$ für alle $u = (u_0, \dots, u_N) \in L^p(\Omega)^{N+1}$. Insbesondere folgt für $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$< \varphi, v >= \varphi(v) = T(i(v)) = \overline{T}(i(v)) = \sum_{i=0}^N \int_\Omega f_i(x) D_i v(x)\,dx.$$

2.3 Schwache Theorie linearer elliptischer Gleichungen und das Lemma von Lax-Milgram

Im folgenden bezeichne Ω stets ein beschränktes glattberandetes Gebiet im $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$. Wir wollen in diesem Abschnitt die schwache Theorie für Randwertprobleme für lineare PDEs 2. Ordnung vom Typ

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ Ru = g & \text{auf } \partial\Omega \qquad \text{(Randbedingung)} \end{cases}$$

erläutern. Hierbei ist

$$\begin{array}{rrcl} & Lu & = & -\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u) + \sum_{i=1}^N b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u + c(x)u \\ \text{kurz:} & Lu & = & -\operatorname{div}(A(x)Du) + b \cdot Du + cu \end{array}$$

ein sogenannter linearer elliptischer Differentialoperator in *Divergenzform.* Bezüglich der Koeffizienten machen wir folgende Annahmen:

i) $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$ für alle $i, j = 1, \dots, N$

ii) $A = (a_{ij})_{i,j}$ ist symmetrisch, d.h. $a_{ij} = a_{ji}$ für alle $i, j = 1, \dots, N$

iii) A ist gleichmässig (in x) positiv definit, d.h. es existiert $\lambda > 0$ mit

$$\xi^t A(x)\xi = A(x)\xi \cdot \xi \geq \lambda|\xi|^2 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ für fast alle } x \in \Omega.$$

[7] dieser besagt, dass der Dualraum $(L^p(\Omega))'$ mit dem Raum $L^{p'}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, identifiziert werden kann

Bemerkungen:
1.) Falls die Koeffizienten genügend glatt sind, kann jeder beliebige lineare Differentialoperator 2. Ordnung

$$\tilde{L}u = -\sum_{i,j=1}^{N} \tilde{a}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} u + \sum_{i=1}^{N} \tilde{b}_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u + \tilde{c}(x) u$$

in Divergenzform geschrieben werden. Setze dazu:

$$a_{ij} = \tilde{a}_{ij}, \quad b_i = \tilde{b}_i + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{a}_{ij}, \quad c = \tilde{c}.$$

Umgekehrt kann jeder Differentialoperator in Divergenzform in die obige Standardform $\tilde{L}u$ geschrieben werden.
Die Divergenzform eignet sich besonders zur Anwendung von partieller Integration und ist deshalb für eine „schwache“ Theorie besonders geeignet.
2.) Wir haben gesehen, dass die Annahme der Symmetrie der Koeffizienten keine Einschränkung im Rahmen der klassischen Lösungstheorie ist.
3.) Die Gleichung $Lu = f$ ist elliptisch auf dem Gebiet Ω genau dann, wenn $A(x)$ definit, etwa positiv definit, für alle $x \in \Omega$. Bedingung 3) ist daher eine *gleichmässige Elliptizitätsbedingung.*

Wir nehmen weiter an, dass für die rechte Seite der PDE gilt

* $f \in L^2(\Omega)$ (insbesondere darf f also unstetig sein)

und $Ru = g$ eine der folgenden Randbedingungen darstellt:

* $u = 0$ bzw. $u = g$ (homogene bzw. nicht-homogene Dirichlet-Randbedingung)
* $A(x)Du \cdot \nu = 0$ bzw. $A(x)Du \cdot \nu = g$ (homogene bzw. nicht-homogene Neumann-Randbedingung)
* $\mu u + A(x)Du \cdot \nu = g$ (Robin-Randbedingung)
* $u = g_1$ auf Γ_1, $A(x)Du \cdot \nu = g_2$ auf Γ_2, wobei Γ_1, Γ_2 messbare Teilmengen von $\partial\Omega$ mit $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ und $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (gemischte Randbedingung)

Hierbei ist $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ eine ebenfalls vorgegebene Funktion, über deren Regularitätseigenschaften wir uns erst später Gedanken machen werden.

2.3.1 RWPs mit homogener Dirichlet-Randbedingung

Wir wollen als erstes das Randwertproblem für homogene Dirichlet-Randbedingungen untersuchen:

$$(RWP1) \qquad \begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Um die schwache H^1-Formulierung des Randwertproblems (RWP1) zu finden, nehmen wir an, dass $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ eine klassische Lösung des RWPs ist und $u \in H^1(\Omega)$ gilt. Aus Satz 2.8 folgt sofort, dass dann schon $u \in H_0^1(\Omega)$ ist.

Wir nehmen **vorübergehend** an, dass die Koeffizienten glatt sind. Multiplikation der Differentialgleichung mit einer Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, anschliessende Integration in x über Ω und Anwendung von partieller Integration auf den Divergenzterm führt zur Gleichung:

$$\begin{aligned} & \int_\Omega A(x)Du(x) \cdot D\varphi(x) + b(x) \cdot Du(x)\varphi(x) + c(x)u(x)\varphi(x)\, dx \\ = & \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Da $u \in H^1(\Omega)$ und die Koeffizienten $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$, gilt

$$ADu, b \cdot Du \in L^2(\Omega)^N,\ cu \in L^2(\Omega).$$

Da ausserdem $\mathcal{D}(\Omega)$ dicht in $H_0^1(\Omega)$, folgt durch Approximation, dass obige Integralgleichung sogar für alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ gilt.
Wir bemerken ausserdem, dass die Familie der Integralgleichungen (für alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$) bereits sinnvoll definiert ist, wenn u **nur** in $H_0^1(\Omega)$ liegt. Diese Tatsache motiviert

Definition 2.9
Eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ heisst *schwache Lösung von (RWP1)*, wenn u die Familie der Integralgleichungen (2.7) für alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ erfüllt.

Wir wollen nun die Fragen nach der

* Existenz einer schwachen Lösung,
* ihrer Eindeutigkeit und
* ihrer stetigen Abhängigkeit von den Daten

untersuchen.

Dazu bemerken wir zunächst, dass durch die linke Seite der Integralgleichung (2.7) eine reellwertige Abbildung auf $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ definiert wird. Diese bezeichnen wir mit a, d.h. wir definieren

$$\begin{array}{rll} a: & H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) & \to \mathbb{R} \\ & (u,v) & \mapsto \int_\Omega ADu \cdot Dv + b \cdot Duv + cuv\, dx \end{array} \tag{2.8}$$

Die Frage nach Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung von (RWP1) lässt sich dann mit Hilfe der Abbildung a äquivalent wie folgt formulieren:

Existiert für alle $f \in L^2(\Omega)$ eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ so, dass

$$a(u,v) = \int_\Omega f(x)v(x)\, dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{2.9}$$

und ist eine solche eindeutig bestimmt?

Wir benötigen im weiteren die folgenden Begriffe:

Definition 2.10
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, $a : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.
Die Abbildung a heisst

* *bilinear*, falls a in jeder Komponente linear ist
* *symmetrisch*, falls $a(x,y) = a(y,x)$ für alle $x, y \in X$
* *positiv*, falls $a(x,x) \geq 0$ für alle $x \in X$
* *stark positiv* oder *koerzitiv*, falls ein $\lambda > 0$ existiert so, dass

$$a(x,x) \geq \lambda \|x\|^2 \qquad \forall x \in X.$$

Eine bilineare Abbildung $a : X \times X \to \mathbb{R}$ heisst *beschränkt*, wenn $M > 0$ existiert so, dass

$$|a(x,y)| \leq M\|x\|\|y\| \qquad \forall x, y \in X.$$

Es ist offensichtlich, dass die durch (2.8) definierte Abbildung bilinear ist. Die Abbildung a heisst daher auch die der *Differentialgleichung zugeordnete Bilinearform.*
Es ist ebenso offensichtlich, dass a symmetrisch ist genau dann, wenn $b = 0$ ist.

Bevor wir weitere Eigenschaften der Bilinearform a untersuchen, wollen wir zunächst den grundlegenden Satz angeben, mit dessen Hilfe wir die Existenz-und Eindeutigkeitsfrage für unser Randwertproblem (RWP1) klären wollen. Dieser Satz, bekannt unter dem Namen „das Lemma von Lax-Milgram“, ist von zentraler Bedeutung in der Theorie der linearen elliptischen partiellen Differentialgleichungen.

Satz 2.12 (Lemma von Lax-Milgram)
Sei $(H, (\cdot,\cdot))$ ein Hilbertraum, $a : H \times H \to \mathbb{R}$ eine beschränkte, koerzitive Bilinearform. Dann gilt:
Für jedes $\phi \in H'$ existiert genau ein $u \in H$ so, dass

$$a(u,v) = <\phi, v>_{H',H} \qquad \forall v \in H.$$

Gelingt es uns also zu zeigen, dass die durch (2.8) auf $H_0^1(\Omega)$ definierte Bilinearform a beschränkt und koerzitiv ist, dann folgt mit dem Lemma von Lax-Milgram:
Für jedes $\phi \in H^{-1}(\Omega)$ existiert genau ein $u \in H_0^1(\Omega)$ so, dass

$$a(u,v) = <\phi, v>_{H^{-1},H_0^1} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.10}$$

Überlegen wir uns zunächst, warum daraus für $f \in L^2(\Omega)$ die Existenz und Eindeutigkeit von $u \in H_0^1(\Omega)$ mit der Eigenschaft

$$a(u,v) = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{2.11}$$

folgt.

Sei dazu $f \in L^2(\Omega)$. Ausgehend von f definieren wir die folgende Abbildung

$$\begin{array}{lll} j_f: & H_0^1(\Omega) & \to \mathbb{R} \\ & v & \mapsto \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \end{array}.$$

Offensichtlich ist j_f linear und stetig, d.h. aber gerade $j_f \in H^{-1}(\Omega)$. Da
$< j_f, v >_{H^{-1},H_0^1} = j_f(v) = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$, folgt:
$u \in H_0^1(\Omega)$ ist Lösung von (2.10) mit $\phi = j_f$ genau dann, wenn u schwache Lösung von (RWP1), d.h. Lösung von (2.11).
Es gilt somit: die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ von (2.10) impliziert die gesuchte Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ von (2.11).

Bemerkung: Die oben eingeführte Zuordnung eines Elements $j_f \in H^{-1}(\Omega)$ zu jedem Element $f \in L^2(\Omega)$ definiert eine lineare Abbildung

$$\begin{array}{lll} j: & L^2(\Omega) & \to H^{-1}(\Omega) \\ & f & \mapsto j_f \end{array}$$

mit folgenden Eigenschaften:
j ist stetig, da

$$\begin{aligned} \|j(f)\|_{H^{-1}} &= \sup_{\substack{v\in H_0^1(\Omega)\\ \|v\|_{H_0^1}\le 1}} |< j_f, v >| \qquad \text{(Def. d. dualen Norm)} \\ &= \sup_{\substack{v\in H_0^1(\Omega)\\ \|v\|_{H_0^1}\le 1}} \left| \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \right| \\ &\le \sup_{\substack{v\in H_0^1(\Omega)\\ \|v\|_{H_0^1}\le 1}} \left(\int_\Omega |f(x)|^2\,dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v(x)|^2\,dx \right)^{1/2} \\ &\le \left(\int_\Omega |f(x)|^2\,dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

für alle $f \in L^2(\Omega)$.
Ausserdem ist j injektiv: aus $j(f) = j(g)$ folgt

$$0 =< j_f - j_g, v >= \int_\Omega (f(x) - g(x))v(x)\,dx \qquad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega),$$

und daher, nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung, $f = g$ f.ü. auf Ω.
Dies zeigt, dass $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$.

Die obigen Betrachtungen legen uns nahe, unsere Definition einer schwachen Lösung des Randwertproblems (RWP1) auch auf rechte Seiten $f \in H^{-1}(\Omega)$ zu erweitern:

Definition 2.11
Sei $f \in H^{-1}(\Omega)$.
Eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ heisst *schwache Lösung von (RWP1)*, falls gilt

$$\begin{aligned} & \int_\Omega A(x)Du(x) \cdot D\varphi(x) + b(x) \cdot Du(x)\varphi(x) + c(x)u(x)\varphi(x)\, dx \\ = \; & < f, \varphi >_{H^{-1}, H_0^1} \end{aligned}$$

für alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Wir wollen nun zunächst das Lemma von Lax-Milgram beweisen:

Beweis:
Für jedes fest gewählte $u \in H$ ist

$$v \in H \mapsto a(u, v) \in \mathbb{R} \tag{2.12}$$

ein stetiges, lineares Funktional auf H, d.h. ein Element in H': die Linearität ergibt sich unmittelbar aus der Linearität von a in der 2. Komponente, die Stetigkeit folgt aus der Beschränktheit von a.
Wir bezeichnen für jedes feste $u \in H$ das durch (2.12) definierte Element in H' mit $\mathcal{A}u$. So können wir einen Operator

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \; & H & \to H' \\ & u & \mapsto \mathcal{A}(u) \end{aligned}$$

definieren, der für jedes $u \in H$ erfüllt:

$$< \mathcal{A}(u), v >_{H', H} = a(u, v) \qquad \forall v \in H.$$

Man sieht leicht, dass $\mathcal{A}$ ein linearer Operator ist: für alle $u_1, u_2 \in H$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ gilt nämlich aufgrund der Linearität von a in der 1. Komponente

$$\begin{aligned} < \mathcal{A}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2), v > &= a(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) \\ &= \alpha_1 a(u_1, v) + \alpha_2 a(u_2, v) \\ &= \alpha_1 < \mathcal{A}u_1, v > + \alpha_2 < \mathcal{A}u_2, v > \\ &= < \alpha_1 \mathcal{A}u_1 + \alpha_2 \mathcal{A}u_2, v > \end{aligned}$$

für alle $v \in H$, und daher $\mathcal{A}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 \mathcal{A}u_1 + \alpha_2 \mathcal{A}u_2$.
Ausserdem ist $\mathcal{A}$ beschränkt. Dies folgt aus der Beschränktheit von a:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}u\|_{H'} &= \sup_{\substack{v \in H \\ \|v\|_H \leq 1}} | < \mathcal{A}u, v >_{H', H} | \\ &= \sup_{\substack{v \in H \\ \|v\|_H \leq 1}} |a(u, v)| \\ &\leq M \|u\|_H. \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Operators lässt sich die zu beweisende Aussage des Satzes von Lax-Milgram nun äquivalent wie folgt formulieren:

$$\mathcal{A} : H \to H' \quad \text{ist bijektiv,}$$

d.h. für alle $f \in H'$ existiert genau ein $u \in H$ so, dass $\mathcal{A}(u) = f$. Offensichtlich löst $u \in H$ diese Operatorgleichung genau dann, wenn

$$j(\mathcal{A}(u)) = j(f),$$

wobei $j : H' \to H$ der aus dem Satz von Riesz bekannte isometrische Isomorphismus ist (mit diesem „Trick“ können wir das Problem nun vollständig in H formulieren).
Letztere Gleichung ist nun offensichtlich genau dann erfüllt, wenn, für beliebiges $\epsilon > 0$, $u \in H$ Lösung der Gleichung

$$u + \epsilon j(\mathcal{A}(u)) = \epsilon j(f) + u,$$

bzw. der Gleichung

$$u = \epsilon j(f) - \epsilon j(\mathcal{A}(u)) + u.$$

Dies ist eine Fixpunktgleichung. Die Behauptung des Satzes von Lax-Milgram ist also äquivalent zur Aussage: die Abbildung

$$\begin{array}{lll} \Phi_\epsilon : & H & \to H \\ & u & \mapsto \epsilon j(f) - \epsilon j(\mathcal{A}(u)) + u \end{array}$$

besitzt einen eindeutigen Fixpunkt. Dies wollen wir nun zeigen.
Seien dazu $u, v \in H$. Wegen der Beschränktheit von $\mathcal{A}$ und der Koerzitivität von a gilt

$$\begin{aligned}
\|\Phi_\epsilon(u) - \Phi_\epsilon(v)\|^2 &= \| - \epsilon j(\mathcal{A}(u)) + u + \epsilon j(\mathcal{A}(v)) - v\|^2 \\
&= \|u - v\|^2 + \epsilon^2 \|j(\mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(v))\|^2 - 2\epsilon(j(\mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(v)), u - v) \\
&= \|u - v\|^2 + \epsilon^2 \|j(\mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(v))\|^2 - 2\epsilon < \mathcal{A}(u - v), u - v > \\
&= \|u - v\|^2 + \epsilon^2 \|\mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(v)\|^2 - 2\epsilon a(u - v, u - v) \\
&\leq \|u - v\|^2 + \epsilon^2 M \|u - v\|^2 - 2\epsilon\lambda \|u - v\|^2 \\
&= (1 + \epsilon(\epsilon M - 2\lambda))\|u - v\|^2.
\end{aligned}$$

Für $\epsilon < 2\lambda/M$ ist damit offensichtlich Φ_ϵ eine strikte Kontraktion. Die Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunktes von Φ_ϵ folgt aus dem Banach'schen Fixpunktsatz.

□

Bemerkung: Man kann nun auch leicht die Frage nach der *stetigen Abhängigkeit* der Lösung u der Gleichung

$$a(u, v) =< f, v >_{H',H} \qquad \forall v \in H$$

von den Daten (der rechten Seite f) beantworten.
Mit den Notationen des Beweises gilt nämlich $u = \mathcal{A}^{-1}(f)$, und da

$$\lambda \|u\|_H^2 \leq a(u, u) =< \mathcal{A}(u), u >_{H',H} =< f, u > H', H \leq \|f\|_{H'} \|u\|_H,$$

folgt dass

$$\|u\|_H = \|\mathcal{A}^{-1} f\|_H \le \frac{\|f\|_{H'}}{\lambda}.$$

Der lineare Operator $\mathcal{A}^{-1} : H' \to H$ (unser „Lösungsoperator“) ist also beschränkt und somit stetig.

Bemerkung: Falls die Bilinearform im Satz von Lax-Milgram noch zusätzlich symmetrisch ist, definiert diese ein neues Skalarprodukt auf H, dass (aufgrund der Beschränktheit und Koerzivität der Bilinearform) eine Norm $a(\cdot,\cdot)^{1/2}$ induziert, die zur vom Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ induzierten Norm äquivalent ist.
In diesem Fall folgt die Behauptung des Lemmas von Lax-Milgram direkt durch Anwendung des Satzes von Riesz.
Im symmetrischen Fall lässt sich die Lösung des Randwertproblems übrigens auf das folgende Minimierungsproblem zurückführen:

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \frac{1}{2}a(u,u) - < f, u >= \min_{v \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - < f, v > \right\} \end{cases} \tag{2.13}$$

Man kann zeigen: u ist schwache Lösung von (RWP1) genau dann, wenn u löst (2.13) [8]. Es folgt: $u \in H_0^1(\Omega)$ minimiert das Funktional Φ genau dann, wenn $a(u,v) - < f, v >= 0$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$.

Zurück zu unserem konkreten Randwertproblem (RWP1):

Um die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung und deren stetige Abhängigkeit von den Daten nachweisen zu können, müssen wir nun nur noch überprüfen, ob die durch (2.7) definierte Bilinearform a beschränkt und koerzitiv ist.
Der Nachweis der Beschränktheit bereitet keine Schwierigkeiten: für beliebiges $u, v \in H_0^1(\Omega)$ ist

$$\begin{aligned} & |a(u,v)| \\ \le & \int_\Omega |A(x)Du(x)||Dv(x)| + |b(x)||Du(x)||v(x)| + |c(x)||u(x)||v(x)|\, dx \\ \le & \int_\Omega |||A(x)|||\,|Du(x)||Dv(x)| + |b(x)||Du(x)||v(x)| + |c(x)||u(x)||v(x)|\, dx \end{aligned}$$

(wir bezeichnen hier mit $|\cdot|$ sowohl die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^N$ als auf $\mathbb{R}$, $|||\cdot|||$ bezeichne eine verträgliche Matrixnorm, etwa die Quadratsummennorm).

[8] man betrachtet dazu das Funktional $\Phi : H \to \mathbb{R}$, $\Phi(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - < f, v >$. Φ ist nach unten beschränkt (folgt aus der Koerzitivität von a) und streng konvex, besitzt daher ein striktes globales Minimum in einem Punkt $u \in H_0^1(\Omega)$. Die Gâteaux-Ableitung $\Phi'(u)$ verschwindet dann notwendigerweise in diesem Punkt u. Es ist aber: $< \Phi'(u), v >= \lim_{t\to 0} \frac{\Phi(u+tv)-\Phi(u)}{t} = a(u,v) - < f, v >$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$.

Mit

$$\begin{aligned} C_A := \text{ess} - \sup_{x\in\Omega} \||A(x)\|| &= \text{ess} - \sup_{x\in\Omega}(\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)^2)^{1/2} \\ &\leq N \max_{i,j=1,\ldots,N} \text{ess} - \sup_{x\in\Omega} |a_{ij}(x)| \\ &< +\infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_b := \text{ess} - \sup_{x\in\Omega} |b(x)| &\leq \sqrt{N} \max_{i=1,\ldots,N} \text{ess} - \sup_{x\in\Omega} |b_i(x)| \\ &< +\infty, \end{aligned}$$

und $C_c := \text{ess} - \sup_{x\in\Omega} |c(x)| < \infty$ folgt, dank der Hölder'schen Ungleichung,

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq C_A \left(\int_\Omega |Du|^2\, dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |Dv|^2\, dx\right)^{1/2} \\ &\quad + C_b \left(\int_\Omega |Du|^2\, dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v|^2\, dx\right)^{1/2} \\ &\quad + C_c \left(\int_\Omega |u|^2\, dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v|^2\, dx\right)^{1/2} \\ &\leq (C_A + C_b + C_c)\|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1}. \end{aligned}$$

Überprüfen wir nun, ob a koerzitiv ist. Für jedes $u \in H_0^1(\Omega)$ folgt wegen der gleichmässigen Elliptizität von a

* im Fall, dass $b(x) = 0$ und $c(x) \geq 0$ f.ü. auf Ω,

  $$\begin{aligned} a(u,u) &\geq \lambda \int_\Omega |Du(x)|^2\, dx \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |D_i u|^2. \end{aligned}$$

  Da der rechte Ausdruck nach der Poincaré'schen Ungleichung äquivalent zur $\|\cdot\|_{1,2}$-Norm folgt, dass

  $$a(u,u) \geq c\|u\|_{H_0^1}$$

  für ein $c > 0$, d.h. a ist koerzitiv.

* im allgemeinen Fall: mit Hölder'scher Ungleichung und Young'scher Ungleichung [9]

  $$\begin{aligned} a(u,u) &\geq \lambda \int_\Omega |Du(x)|^2\, dx - C_b(\int_\Omega |Du|^2)^{1/2}(\int_\Omega u^2)^{1/2} - C_c \int_\Omega u^2 \\ &\geq (\lambda - \epsilon C_b) \int_\Omega |Du(x)|^2\, dx - (\frac{C_b}{4\epsilon} + C_c) \int_\Omega u^2. \end{aligned}$$

[9] für $a, b > 0$ und $\epsilon > 0$ gilt: $ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon} b^2$; dies folgt unmittelbar aus der Konkavität der log-Funktion: $\log(\epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon}) = \log(1/2(2\epsilon a^2) + 1/2\frac{b^2}{2\epsilon}) \geq 1/2\log(2\epsilon a^2) + 1/2\log(\frac{b^2}{2\epsilon}) = \log(ab))$

Wir wählen ϵ so klein, dass der Koeffizient des ersten Integrals positiv ist. Dann gilt, für alle $\mu > \mu_0 = \frac{C_b}{4\epsilon} + C_c$, dass die Bilinearform

$$a_\mu : \begin{array}{ll} H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) & \to \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto a(u,v) + \mu \int_\Omega uv \end{array}$$

koerzitiv ist.
Die Bilinearform a selbst ist offensichtlich i.a. nicht koerzitiv.

Wir haben damit folgenden Satz gezeigt:

Satz 2.13

i) Falls $b = 0$ und $c \geq 0$ fast überall in Ω, dann gilt:
für alle $f \in H^{-1}(\Omega)$ existiert eine eindeutige schwache Lösung von (RWP1).

ii) Im allgemeinen Fall gilt: Es existiert $\mu_0 > 0$, so dass, für alle $\mu > \mu_0$, das Randwertproblem

$$\begin{array}{ll} Lu + \mu u = f & \text{auf } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{array}$$

für alle $f \in H^{-1}(\Omega)$ eine eindeutige schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ besitzt.

2.3.2 RWPs mit nicht-homogener Dirichlet-Randbedingung

Betrachten wir das Randwertproblem mit nicht-homogener
Dirichlet-Randbedingung

$$(RWP2) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} Lu = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega \end{array} \right. .$$

Um eine geeignete schwache Formulierung zu finden, nehmen wir wieder vorübergehend an, alle Koeffizienten und die rechten Seiten f und g wären glatte Funktionen.
Wir wollen ausserdem annehmen, dass g eine glatte Fortsetzung $\tilde{g}$ auf $\overline{\Omega}$ besitzt.
Dann kann die Randbedingung in die rechte Seite der PDE „transformiert" und das Randwertproblem (RWP2) auf das schon bekannte homogene Randwertproblem (RWP1) zurückgeführt werden.
Dazu bemerken wir, dass nach dem Superpositionsprinzip für lineare PDEs gilt: ist $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ eine klassische Lösung des Randwertproblems

$$(RWP1)^* \qquad \left\{ \begin{array}{ll} Lv = f - L\tilde{g} & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{array} \right. ,$$

dann ist $u := v + \tilde{g}$ eine klassische Lösung des Randwertproblems (RWP2).
Umgekehrt gilt natürlich auch: ist $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ eine klassische Lösung von (RWP2), dann ist $v := u - \tilde{g}$ eine klassische Lösung von (RWP1)*.

Das Superpositionsprinzip sollte natürlich auch für schwache Lösungen gelten.

Die schwache Formulierung von (RWP1)* erhalten wir bekanntlich, indem wir die PDE mit einer Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ multiplizieren, in x über Ω integrieren und partielle Integration im Divergenzterm (hier jeweils auf beiden Seiten der Gleichung) anwenden. Somit ergibt sich die schwache Form der PDE von (RWP1)*:

$$\begin{aligned} &\int A(x)Dv \cdot D\varphi + b(x) \cdot Dv\varphi + c(x)v\varphi \, dx \\ = \quad &\int_\Omega f\varphi \, dx - \int_\Omega A(x)D\tilde{g} \cdot D\varphi + b(x) \cdot D\tilde{g}\varphi + c(x)\tilde{g}\varphi \, dx \end{aligned}$$

zunächst für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, und da $\mathcal{D}(\Omega)$ dicht in $H^1_0(\Omega)$, auch für alle $\varphi \in H^1_0(\Omega)$. Damit die schwache Formulierung sinnvoll ist, reicht es natürlich wie im vorigen Abschnitt auch, dass die Koeffizienten unseres Differentialoperators in $L^\infty(\Omega)$ liegen, $u \in H^1_0(\Omega)$ und $f \in H^{-1}(\Omega)$ (wobei dann natürlich das entsprechende Integral durch die Dualitätsklammer zu ersetzen ist).
Damit die obige Transformation der Randbedingung in die rechte Seite der PDE funktioniert und (RWP1)* im obigen schwachen Sinne formuliert werden kann, muss auch das Randdatum g nicht, wie bisher angenommen, beliebig glatt sein. Es reichen beispielsweise schon die folgenden Voraussetzungen:

$$g : \partial\Omega \to \mathbb{R} \quad \text{ist stetig,} \tag{2.14}$$

und

$$\text{es existiert eine Funktion } \tilde{g} \in C(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega) \qquad \text{mit } \tilde{g}_{|\partial\Omega} = g. \tag{2.15}$$

Unter dieser Voraussetzung ist dann $L\tilde{g} \in H^{-1}(\Omega)$, genauer: das Funktional

$$\varphi \in H^1_0(\Omega) \mapsto -\int_\Omega A(x)D\tilde{g} \cdot D\varphi + b(x) \cdot D\tilde{g}\varphi + c(x)\tilde{g}\varphi \, dx \in \mathbb{R}$$

ist linear und stetig und somit ein Element in $H^{-1}(\Omega)$, und so kann (RWP1)* wie im Abschnitt zuvor beschrieben behandelt werden.

Diese Vorüberlegungen führen uns in natürlicher Weise zu

Definition 2.12
Sei $f \in H^{-1}(\Omega)$, $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ erfülle (2.14) und (2.15).
Eine Funktion $u \in H^1(\Omega)$ heisst *schwache Lösung von (RWP2)*, wenn $v := u - \tilde{g} \in H^1_0(\Omega)$ und v schwache Lösung von (RWP1)*, d.h.

$$\begin{aligned} &\int A(x)Dv \cdot D\varphi + b(x) \cdot Dv\varphi + c(x)v\varphi \, dx \\ = \quad &< f, \varphi >_{H^{-1},H^1_0} - \int_\Omega A(x)D\tilde{g} \cdot D\varphi + b(x) \cdot D\tilde{g}\varphi + c(x)\tilde{g}\varphi \, dx \end{aligned} \tag{2.16}$$

für alle $\varphi \in H^1_0(\Omega)$.

Die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung von (RWP1)* lässt sich mit Satz 2.13 klären. Für (RWP2) folgt somit

Satz 2.14

i) Falls $b = 0$ und $c \geq 0$ fast überall in Ω, dann gilt:
für alle $f \in H^{-1}(\Omega)$ und alle Randdaten g mit (2.14) und (2.15) existiert eine eindeutige schwache Lösung von (RWP2).

ii) Im allgemeinen Fall gilt: Es existiert $\mu_0 > 0$, so dass, für alle $\mu > \mu_0$, das Randwertproblem

$$\begin{aligned} Lu + \mu u = f \quad & \text{auf } \Omega \\ u = g \quad & \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

für alle $f \in H^{-1}(\Omega)$ und alle Randdaten g mit (2.14) und (2.15) eine eindeutige schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ besitzt.

Beweis:
Die Existenzaussage folgt unmittelbar aus dem Existenzresultat für (RWP1).
Es bleibt zu zeigen, dass die Eindeutigkeit von schwachen Lösungen von (RWP1) die Eindeutigkeit von schwachen Lösungen von (RWP2) impliziert. Wir werden tatsächlich etwas mehr tun und gleichzeitig zeigen, dass die Definition 2.12 einer schwachen Lösung von (RWP2) nicht von der Wahl der Fortsetzung von g auf $\overline{\Omega}$ abhängt.
Seien dazu $\tilde{g}_1$, $\tilde{g}_2$ zwei Fortsetzungen von g wie in (2.15) und $u_1, u_2 \in H^1(\Omega)$ zugehörige schwache Lösungen von (RWP2) im Sinne der Definition 2.12 mit $\tilde{g} = \tilde{g}_1$ bzw. $= \tilde{g}_2$. Somit sind $v_1 = u_1 - \tilde{g}_1 \in H_0^1(\Omega)$ und $v_2 = u_2 - \tilde{g}_2 \in H_0^1(\Omega)$ schwache Lösungen von (RWP1)*. Nach Definition der schwachen Lösung von (RWP1)* (siehe (2.16)) gilt dann für alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} & \int A(x)Dv_1 \cdot D\varphi + b(x) \cdot Dv_1\varphi + c(x)v_1\varphi \, dx \\ = \quad & < f, \varphi > - \int_\Omega A(x)D\tilde{g}_1 \cdot D\varphi + b(x) \cdot D\tilde{g}_1\varphi + c(x)\tilde{g}_1\varphi \, dx \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} & \int A(x)Dv_2 \cdot D\varphi + b(x) \cdot Dv_2\varphi + c(x)v_2\varphi \, dx \\ = \quad & < f, \varphi > - \int_\Omega A(x)D\tilde{g}_2 \cdot D\varphi + b(x) \cdot D\tilde{g}_2\varphi + c(x)\tilde{g}_2\varphi \, dx. \end{aligned}$$

Da $v_1 = u_1 - \tilde{g}_1$ bzw. $v_2 = u_2 - \tilde{g}_2$, vereinfachen sich die obigen Gleichungen zu

$$\int A(x)Du_1 \cdot D\varphi + b(x) \cdot Du_1\varphi + c(x)u_1\varphi \, dx =< f, \varphi >$$

sowie

$$\int A(x)Du_2 \cdot D\varphi + b(x) \cdot Du_2\varphi + c(x)u_2\varphi \, dx =< f, \varphi > .$$

Subtraktion der beiden Gleichungen führt zu

$$\int A(x)D(u_1-u_2)\cdot D\varphi + b(x)\cdot D(u_1-u_2)\varphi + c(x)(u_1-u_2)\varphi\, dx = 0 \quad (2.17)$$

für alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.
Da $v_1, v_2 \in H_0^1(\Omega)$, ist natürlich $(v_1 - v_2) \in H_0^1(\Omega)$. Es gilt aber auch $(\tilde{g}_1 - \tilde{g}_2) \in H_0^1(\Omega)$ (dies folgt nach Satz 2.8, denn $(\tilde{g}_1 - \tilde{g}_2) \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ und $\tilde{g}_1 - \tilde{g}_2 = 0$ auf $\partial\Omega$). Somit ist dann $u := u_1 - u_2 = (v_1 - v_2) + (\tilde{g}_1 - \tilde{g}_2) \in H_0^1(\Omega)$.
Zusammen mit (2.17) folgt, dass u eine schwache Lösung des homogenen Randwertproblems (RWP1)

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.18)$$

ist. Wegen der Eindeutigkeit der schwachen Lösung von (RWP1) folgt $u = 0$, d.h. aber $u_1 = u_2$.

□

<u>**Bemerkungen:**</u>
1.) Im Fall $N = 1$ und $\Omega =]a, b[$ sind die Voraussetzungen (2.14) und (2.15) an das Randdatum g keine Einschränkung: jede beliebige Randbedingung der Form $u(a) = \alpha$, $u(b) = \beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist zulässig. Für die geforderte Funktion $\tilde{g}$ kann beispielsweise die lineare Interpolation $\tilde{g}(x) = \alpha + (x-a)\frac{\alpha-\beta}{a-b}$ gewählt werden.
2.) Im Fall $N \geq 2$ schränken die Bedingungen (2.14) und (2.15) allerdings die Klasse der zulässigen Randdaten unnötig ein.
Mit Hilfe der *Spurtheorie* für Sobolev-Funktionen kann die zulässige Randdatenklasse erheblich erweitert werden. Dies folgt aus:

Satz 2.15
Sei Ω ein beschränktes glattberandetes Gebiet im $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $1 \leq p < \infty$.
Dann existiert ein stetiger linearer Operator

$$\tau : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

mit der Eigenschaft:

$$\tau(u) = u_{|\partial\Omega} \qquad \forall u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}).$$

τ heisst der *Spuroperator*; $\tau(u)$ heisst die *Spur* von $u \in W^{1,p}(\Omega)$ auf $\partial\Omega$.

Beweis:
Details s. Evans
<u>Beweisidee:</u>
1. Schritt: Man zeigt zunächst für glatte Funktionen $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ die Abschätzung

$$\int_{\partial\Omega} |u(x)|^p\, dx \leq C(p, \Omega)\|u\|_{1,p}^p$$

mit einer nur p und Ω abhängigen Konstanten $C(p, \Omega)$.
Die obige Abschätzung zeigt, dass der (lineare) Operator

$$\begin{aligned} T: \quad C^\infty(\overline{\Omega}) &\to L^p(\partial\Omega) \\ u &\mapsto u_{|\partial\Omega} \end{aligned}$$

stetig ist.
2. Schritt: Da $C^\infty(\overline{\Omega})$ dicht in $W^{1,p}(\Omega)$ ist, kann T zu einem stetigen linearen Operator τ auf $W^{1,p}(\Omega)$ fortgesetzt werden. Dies ist der gesuchte Spuroperator. $\square$

Bemerkungen:
1.) Mit Hilfe des Spuroperators kann von den Werten einer beliebigen Sobolev-Funktion auf dem Rand $\partial\Omega$ gesprochen werden. Anstelle von $\tau(u)$ schreibt man oft auch einfach $u_{|\partial\Omega}$.
2.) Man kann zeigen, dass $W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega);\ \tau(u) = 0 \text{ f.ü. auf } \partial\Omega\}$.
$W_0^{1,p}(\Omega)$ ist also der Kern des linearen Spuroperators τ.
3.) Die Bildmenge des Spuroperators $\tau(W^{1,p}(\Omega))$ besteht aus genau den Funktionen $g \in L^p(\partial\Omega)$, die Restriktion einer Funktion $\tilde{g} \in W^{1,p}(\Omega)$ sind. Das ist aber genau die Regularität, die (im Fall $p = 2$) für die schwache Lösbarkeit unseres nicht-homogenen Dirichlet-Randwertproblems (RWP2) notwendig ist.
$\tau(W^{1,p}(\Omega))$ ist ein echter linearer Teilraum von $L^p(\partial\Omega)$, ist aber deutlich grösser als die Menge der Funktionen g auf dem Rand, die (2.14) und (2.15) erfüllen.
$\tau(W^{1,p}(\Omega))$ enthält beispielsweise auch unstetige und sogar unbeschränkte Funktionen.

Beispiel: die Funktion $x \mapsto u(x) = \frac{1}{|x-x_0|^{N-2}} \in W^{1,p}(\Omega)$ für alle $1 \leq p < \frac{N}{N-1}$ und somit offensichtlich $u_{|\partial\Omega} \in \tau(W^{1,p}(\Omega))$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sei hier ein beliebiges beschränktes glattberandetes Gebiet, $N \geq 3$, $x_0 \in R^N$). Enthält der Rand der Menge Ω den Punkt x_0, ist $u_{|\partial\Omega}$ offensichtlich unstetig und unbeschränkt.

4.) Mit Hilfe des Spuroperators kann eine schwache Lösung von (RWP2) in einfacherer Weise und für allgemeinere Randdaten wie folgt definiert werden:

Definition 2.13
Seien $f \in H^{-1}(\Omega)$, $g \in \tau(H^1(\Omega))$.
Eine Funktion $u \in H^1(\Omega)$ ist schwache Lösung von (RWP2), wenn $\tau(u) = g$ f.ü. auf $\partial\Omega$ und

$$\int_\Omega A(x)Du \cdot D\varphi + b(x) \cdot Du\varphi + c(x)u\varphi =< f, \varphi >_{H^{-1},H_0^1}$$

für alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

2.3.3 RWPs mit anderen Randbedingungen

Betrachten wir nun das Randwertproblem mit Robin-Randbedingung

$$(RWP3) \qquad \begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ \mu u + A(x)Du \cdot \nu = g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

wobei $\mu \in \mathbb{R}$. Für $\mu = 0$ reduziert sich die Randbedingung auf die Neumann-Randbedingung $A(x)Du \cdot \nu = g$.
Um eine schwache H^1-Formulierung von (RWP3) zu finden, nehmen wir wieder vorübergehend an, alle Koeffizienten und rechten Seiten seien glatt und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ wäre klassische Lösung von (RWP3).

Multiplikation der Gleichung mit einer Funktion $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ (und **nicht** etwa $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ wie im Fall des Dirichlet-Randwertproblems, da sonst die Randbedingung „verloren" geht), anschliessende Integration über Ω und Anwendung der partiellen Integration auf den Divergenzterm führt zur Integralgleichung

$$-\int_{\partial\Omega} A(x)Du \cdot \nu\varphi \, d\sigma(x) + \int_\Omega A(x)Du \cdot D\varphi + b(x) \cdot Du\varphi + c(x)u\varphi \, dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x) \, dx.$$

Wegen der Randbedingung gilt

$$-\int_{\partial\Omega} A(x)Du \cdot \nu\varphi \, d\sigma(x) = \int_{\partial\Omega} (\mu u - g)\varphi \, d\sigma(x),$$

und somit erhalten wir die Familie der Integralgleichungen

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega} \mu u\varphi \, d\sigma(x) + \int_\Omega A(x)Du \cdot D\varphi + b(x) \cdot Du\varphi + c(x)u\varphi \, dx \\ = & \int_{\partial\Omega} g\varphi \, d\sigma(x) + \int_\Omega f(x)\varphi(x) \, dx. \end{aligned}$$

Da $C^\infty(\overline{\Omega})$ dicht in $H^1(\Omega)$, gelten die Integralgleichungen sogar für alle $\varphi \in H^1(\Omega)$. Hierbei benutzen wir, dass die Konvergenz einer Folge (φ_n) in $H^1(\Omega)$ wegen der Stetigkeit des Spuroperators die Konvergenz der Spuren $(\tau(\varphi_n))$ in $L^2(\partial\Omega)$ impliziert. Daher kann auch im Randintegralterm zum Limes übergegangen werden.
Nun stellen wir noch fest, dass die Familie der Integralgleichungen bereits sinnvoll definiert ist, wenn nur $u \in H^1(\Omega)$ gilt. Wieder benutzen wir dabei den Spuroperator: für $u \in H^1(\Omega)$ ist die Spur $\tau(u)$ von u in $L^2(\partial\Omega)$, weshalb das Randintegral sinnvoll definiert ist.
Diese Überlegungen führen uns zur

Definition 2.14
Sei $\mu \in \mathbb{R}$, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$.
Eine Funktion $u \in H^1(\Omega)$ ist *schwache Lösung von (RWP3)*, wenn

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega} \mu u(x)v(x) \, d\sigma(x) + \int_\Omega A(x)Du \cdot Dv + b(x) \cdot Duv + c(x)uv \, dx \\ = & \int_{\partial\Omega} g(x)v(x) \, d\sigma(x) + \int_\Omega f(x)v(x) \, dx \end{aligned}$$

für alle $v \in H^1(\Omega)$ [a].

[a] Wie in den Beispielen zuvor kann allgemeiner eine schwache Lösung für eine allgemeinere rechte Seite $f \in (H^1(\Omega))'$ definiert werden; es muss dann nur wieder das Integral $\int_\Omega f(x)v(x) \, dx$ durch die entsprechende Dualitätsklammer $< f, v >_{(H^1)', H^1}$ ersetzt werden.

Beachten wir, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \quad & H^1(\Omega) && \mapsto \mathbb{R} \\ & v && \to \textstyle\int_{\partial\Omega} g(x)v(x) \, d\sigma(x) + \int_\Omega f(x)v(x) \, dx \end{aligned}$$

linear und stetig ist, d.h. aber gerade $\Phi \in (H^1(\Omega))'$.
Zur Klärung der Existenz und Eindeutigkeit der schwachen Lösung ist nun noch die Bilinearform

$$a: \begin{array}{ll} H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) & \to \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto \int_{\partial\Omega} \mu uv \, d\sigma + \int_\Omega ADu \cdot Dv + b \cdot Duv + cuv \, dx \end{array}$$

auf Beschränktheit und Koerzivität zu untersuchen. Dabei bereitet der Nachweis der Beschränktheit keine Probleme (zur Abschätzung des Randintegrals benutzt man die Stetigkeit des Spuroperators $\tau : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$). Die Koerzivität kann nur unter bestimmten Voraussetzungen an die Koeffizienten gezeigt werden. Falls $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ koerzitiv, so folgt mit Hilfe des Lemmas von Lax-Milgram die Existenz und Eindeutigkeit einer Funktion $u \in H^1(\Omega)$ so, dass

$$a(u,v) = \Phi(v) \qquad \text{für alle } v \in H^1(\Omega).$$

In manchen Fällen gelingt es nur, die Koerzivität der Einschränkung der Bilinearform a auf einen geeignet gewählten echten Teilraum $V \times V$ mit $V \subset H^1(\Omega)$ zu zeigen (siehe Übung). Da die Einschränkung der oben definierten linearen Abbildung Φ auf V natürlich auch wieder stetig ist, liefert das Lemma von Lax-Milgram in diesem Fall die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $u \in V$ der Variationsformulierung

$$a(u,v) = \Phi(v) \qquad \text{für alle } v \in V.$$

Natürlicherweise bezeichnen wir diese Lösung dann auch wieder als schwache Lösung von (RWP3), d.h. wir modifizieren in diesem Fall die Definition 2.13, indem wir den Raum $H^1(\Omega$ durch den Teilraum V ersetzen.

Betrachten wir zuletzt das Randwertproblem mit gemischter (homogener) Randbedingung:

$$(RWP4) \qquad \begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \Gamma_1 \\ A(x)Du \cdot \nu = 0 & \text{auf } \Gamma_2 \end{cases},$$

wobei Γ_1, Γ_2 messbare Teilmengen (positiven Masses) des Randes $\partial\Omega$ mit $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$.
Die schwache Formulierung von (RWP4) erhalten wir in der üblichen Weise. Es ist zu beachten, dass wie gehabt die Dirichlet-Randbedingung auf Γ_1 wieder in die Definition des Raumes eingearbeitet wird. Somit ist der natürliche Funktionenraum für die Formulierung von (RWP4):

$$V = \{u \in H^1(\Omega);\ \tau(u) = 0 \text{ f.ü. auf } \Gamma_1\}.$$

Man überprüft leicht, dass V ein abgeschlossener linearer Teilraum von $H^1(\Omega)$ ist, und somit mit dem Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ aus $H^1(\Omega)$ selbst wieder ein Hilbertraum ist.
Die Neumann-Randbedingung auf Γ_2 fliesst wie zuvor gesehen nur in die Formulierung der Bilinearform ein.

Somit ergibt sich in natürlicher Weise:

Definition 2.15
Sei $f \in V'$.
Eine Funktion $u \in V$ ist *schwache Lösung von (RWP4)*, wenn

$$\int_\Omega A(x)Du \cdot D\varphi + b(x) \cdot Du\varphi + c(x)u\varphi \, dx =< f, \varphi >_{V',V}$$

für alle $\varphi \in V$.

Zum Nachweis der Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung betrachten wir daher in diesem Fall die Bilinearform

$$\begin{array}{lll} a: & V \times V & \to \mathbb{R} \\ & (u,v) & \mapsto \int_\Omega ADu \cdot Dv + b \cdot Duv + cuv \, dx \end{array}$$

Die Beschränktheit von a folgt wie in den Beispielen zuvor. Zum Nachweis der Koerzivität benötigen wir die folgende Verschärfung der Poincaré'schen Ungleichung:

Satz 2.16 (Friedrich'sche Ungleichung)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes glatt berandetes Gebiet, $\Gamma_1 \subset \partial\Omega$ eine Teilmenge positiven Masses, $1 \leq p < \infty$.
Dann existiert eine Konstante $C > 0$ so, dass

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \leq C \left(\int_{\Gamma_1} |u(x)|^p \, dx + \int_\Omega |Du(x)|^p \, dx \right)$$

für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Beweis:
als Übung □

Es ergibt sich nun leicht

Satz 2.17

i) Falls $b = 0$ und $c \geq 0$ fast überall in Ω, dann gilt:
für alle $f \in V'$ existiert eine eindeutige schwache Lösung von (RWP4).

ii) Im allgemeinen Fall gilt: Es existiert $\mu_0 > 0$, so dass, für alle $\mu > \mu_0$, das Randwertproblem

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f & \text{auf } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \Gamma_1 \\ A(x)Du \cdot \nu = 0 & \text{auf } \Gamma_2 \end{cases}$$

für alle $f \in V'$ eine eindeutige schwache Lösung $u \in V$ besitzt.