Kapitel 3

Lösungsmethoden für nichtlineare elliptische Gleichungen

Im letzten Kapitel haben wir die schwache Lösungstheorie für lineare elliptische PDEs kennengelernt. Das Lemma von Lax-Milgram stellte dabei den zentralen Satz dar, mit dessen Hilfe Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung von Randwertproblemen für lineare elliptische PDEs gezeigt werden konnte.
In diesem Kapitel wollen wir Randwertprobleme für **nicht-lineare** elliptische PDEs vom Typ

$$- \operatorname{div}\,(A(x,u,Du)) + \Phi(x,u,Du) = f \qquad \text{auf } \Omega \subset \mathbb{R}^N \tag{3.1}$$

untersuchen.
Hierbei sind $A : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $\Phi : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ gegebene nicht-lineare Funktionen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine gegebene rechte Seite.

Es ist offensichtlich, dass das Lemma von Milgram nicht **direkt** verwendet werden kann, um nicht-lineare PDEs zu lösen. Wir werden in diesem Kapitel verschiedene Methoden kennenlernen (Fixpunktmethoden, Monotoniemethoden,...), mit deren Hilfe man **bestimmte Klassen** von nicht-linearen PDEs lösen kann.
Es gibt keine einheitliche Lösungstheorie für die grosse Vielfalt von nicht-linearen Gleichungen!

Betrachten wir zunächst einige Beispiele von nicht-linearen Randwertproblemen. In dem gesamten Kapitel bezeichne Ω stets ein beschränktes glatt berandetes Gebiet in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$.

Beispiele:

1.)

$$(\mathbf{RWP1}) \begin{cases} -\Delta(u) + \Phi(x,u) = f & \text{auf } \Omega \\ \qquad\quad u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

wobei $\Phi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine vorgegebene nicht-lineare Funktion, $f : \Omega \to \mathbb{R}$.
RWPs diesen Typs treten bei der Modellierung von Reaktions-Diffusionsprozessen auf und beschreiben das System im Gleichgewichtszustand.

2.)

$$
(\mathbf{RWP2})\begin{cases} -\ \mathrm{div}\ (A(x,u)Du) = f & \text{auf } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}
$$

wobei $A : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N\times N}$ eine vorgegebene nicht-lineare Matrix-Funktion, $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Die PDE beschreibt einen nichtlinearen Diffusionsprozess im stationären Zustand. Nichtlineare Diffusionen treten in vielen verschiedenen Anwendungsbereichen auf: Strömungsmechanik, Bildverarbeitung, Oberflächenhärtung in der Stahlproduktion, ...

3.)

$$
(\mathbf{RWP3})\begin{cases} -\ \mathrm{div}\ (|Du|^{p-2}Du) = f & \text{auf } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}
$$

wobei $1 < p < \infty$,$f : \Omega \to \mathbb{R}$, $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$.

Für $p = 2$ reduziert sich obige PDE auf die Poisson-Gleichung für den linearen Laplace-Operator Δ. Im allgemeinen Fall bezeichnet man den Differentialoperator $\mathrm{div}\ (|Du|^{p-2}Du)$ daher daher auch als p-Laplace-Operator, oder kurz: p-Laplace.
Notation: $\Delta_p(u) = \mathrm{div}\ (|Du|^{p-2}Du)$.

Im Gegensatz zum Laplace-Operator, der bei der Modellierung von Strömungen sog. Newton'scher Flüssigkeiten (z.B. Grundwasserströmungen) auftaucht, ist zur adäquaten Beschreibung turbulenter Strömungen und Strömungen von sog. nicht-Newton'schen Flüssigkeiten (beispielsweise zähfliessende Stoffe wie Polymere, Gletscherschmelzen, ...) die Verwendung des nicht-linearen p-Laplace erforderlich. Die PDE in den Beispielen 1.)-3.) sind allesamt nicht linear.
Allerdings ist die PDE aus Beispiel 1.) semi-linear: der Differentialoperator $-\Delta u + c(x,u)$ besteht aus einem linearen Hauptteil, dem linearen Laplace-Operator, und einer nicht-linearen Störung 0-ter Ordnung.
Die PDEs aus den Beispielen 2.) und 3.) sind quasi-linear, da linear in der höchsten Ableitung, wobei die Koeffizienten in Beispiel 2.) nur von u, in Beispiel 3.) vom Gradienten Du abhängen.

Formal gelangen wir zu einer schwachen Formulierung eines nicht-linearen RWPs vom Typ genauso wie im linearen Fall durch Multiplizieren der Gleichung mit einer Testfunktion $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ (im Fall der homogenen Dirichlet-Randbedingung), Integration der Gleichung über Ω und anschliessender Anwendung partieller Integration zur Übertragung einer Ableitung auf die Testfunktion. Im Fall der allgemeinen nicht-linearen Gleichung erhalten wir so formal die Integralgleichungen

$$
\int_\Omega A(x,u,Du)\cdot Dv + \Phi(x,u,Du)v\,dx = \int_\Omega fv\,dx.
$$

Im Anschluss wird ein geeigneter Sobolev-Raum $V = W_0^{1,s}(\Omega)$, $1 \leq s < \infty$, gesucht, so dass die Integralgleichungen wohldefiniert sind für alle $u, v \in V$.

Durch die linke Seite der Integralgleichungen ist dann wieder eine Abbildung $a : V \times V \to \mathbb{R}$ definiert, die allerdings nicht mehr bilinear ist. Für festes $u \in V$ ist jedoch die Abbildung

$$v \in V \mapsto a(u,v) = \int_\Omega A(x,u,Du) \cdot Dv + \Phi(x,u,Du)v \, dx$$

linear.

Wenn die Voraussetzungen an die Koeffizientenfunktionen $A(x,r,\xi)$ und $\Phi(x,r,\xi)$ eine Abschätzung der Form

$$|a(u,v)| \leq C(u)\|v\|_V \qquad \forall v \in V$$

erlauben, wobei $C(u) > 0$ eine (i.a. von u abhängige) Konstante ist, dann ist die lineare Abbildung $v \in V \mapsto a(u,v)$ stetig, d.h. ein Element in V'. Dieses wollen wir wieder mit $\mathcal{A}u$ bezeichnen. Somit können wir wieder einen Operator

$$\mathcal{A} : V \to V'$$

definieren mit der Eigenschaft, dass $< \mathcal{A}u, v >= a(u,v)$ für alle $u, v \in V$. Das Problem der Existenz (resp. der Existenz und Eindeutigkeit) von schwachen Lösungen des RWPs, d.h. wann gilt:

$$\forall f \in V' \; \exists \; \text{(resp. } \exists) u \in V \quad \text{mit } a(u,v) =< f, v > \quad \forall v \in V$$

ist damit äquivalent zum Problem, unter welchen Voraussetzungen gilt:

$$\mathcal{A} : V \to V' \qquad \text{ist surjektiv (resp. bijektiv).}$$

Welche Eigenschaften von a garantieren nun die Surjektivität resp. Bijektivität von $\mathcal{A}$?

3.1 Nicht-lineare elliptische RWPs mit stark monotonem Operator

Betrachten wir zunächst noch einmal die Situation im linearen Fall in einem Hilbertraum $V = H$. Der Beweis des Lemmas von Lax-Milgram hat gezeigt, dass zwei Eigenschaften die Bijektivität eines linearen Operators $\mathcal{A} : H \to H'$ garantieren:

* $\mathcal{A}$ ist beschränkt (und weil linear, dann auch stetig und sogar Lipschitz-stetig)
* $\mathcal{A}$ erfüllt die Abschätzung

  $$< \mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v >_{V',V} \geq \lambda \|u - v\|_V^2 \qquad \forall u, v \in V,$$

  (in Analogie mit der entsprechenden Eigenschaft der zugehörigen Bilinearform wird ein linearer Operator $\mathcal{A}$ mit dieser Eigenschaft auch als stark positiv bezeichnet)

Obige Eigenschaften lassen sich auch für nicht-lineare Operatoren $\mathcal{A} : V \to V'$ und einem beliebigen Banachraum definieren.

Definition 3.1
Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, $\mathcal{A} : V \to V'$ ein Operator. Dann heisst $\mathcal{A}$

(i) *Lipschitz-stetig*, wenn ein $L > 0$ existiert so, dass

$$\|\mathcal{A}u - \mathcal{A}v\|_{V'} \leq L\|u - v\|_V \qquad \forall u, v \in V$$

(ii) *stark monoton*, wenn ein $\lambda > 0$ existiert so, dass

$$< \mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v >_{V',V} \geq \lambda \|u - v\|_V^2 \qquad \forall u, v \in V.$$

Bemerkung: Wenn $\mathcal{A}$ linear ist, fallen offensichtlich die Begriffe der Beschränktheit und Lipschitz-Stetigkeit bzw. die der starken Positivität und starken Monotonie zusammen.

Für nicht-lineare Lipschitz-stetige und stark monotone Operatoren lässt sich leicht der Beweis von Lax-Milgram übertragen, um folgenden Satz zu zeigen:

Satz 3.1 (Zarantonello)
Sei $(H, (\cdot, \cdot))$ ein Hilbertraum, $\mathcal{A} : H \to H'$ Lipschitz-stetig und stark monoton. Dann ist $\mathcal{A}$ bijektiv.

Beweis:
Wie im Beweis von Lax-Milgram kann mit Hilfe der Riesz'schen Abbildung $J : H' \to H$ die für beliebiges $f \in H'$ zu lösende Operatorgleichung $\mathcal{A}u = f$ äquivalent umformuliert werden als Fixpunktproblem:

$$u = \epsilon jf - \epsilon j\mathcal{A}u + u =: \Phi_\epsilon(u),$$

wobei $\epsilon > 0$ beliebig.
Die Lipschitz-Stetigkeit zusammen mit der starken Monotonie erlauben dann wieder zu zeigen, dass die oben definierte Abbildung $\Phi_\epsilon : H \to H$ für genügend kleines $\epsilon > 0$ eine strikte Kontraktion ist:

$$\begin{aligned}
\|\Phi_\epsilon(u) - \Phi_\epsilon(v)\|_H^2 &= \|u - v\|_H^2 + \epsilon^2\|\mathcal{A}u - \mathcal{A}v\|_H^2 - 2\epsilon(j\mathcal{A}u - j\mathcal{A}v, u - v) \\
&\leq \|u - v\|_H^2 + \epsilon^2 L^2 \|u - v\|_H^2 - 2\epsilon < \mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v > \\
&\leq \|u - v\|_H^2 + \epsilon^2 L^2 \|u - v\|_H^2 - 2\epsilon\lambda\|u - v\|_H^2 \\
&= \underbrace{(1 + \epsilon(\epsilon L^2 - 2\lambda))}_{<0 \text{ für } \epsilon < 2\lambda/L^2} . \|u - v\|^2,
\end{aligned}$$

Die Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunktes von Φ_ϵ folgt wieder mit dem Banach'schen Fixpunktsatz. □

Bemerkung: Analog wie im Beweis des Lemmas von Lax-Milgram ergibt sich auch hier die stetige Abhängigkeit der Lösung von der rechten Seite. Für $u = \mathcal{A}^{-1}f$, $v =$

$\mathcal{A}^{-1}g$, $f, g \in V'$, erhalten wir wegen der starken Monotonie von $\mathcal{A}_1$ die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}^{-1}f - \mathcal{A}^{-1}g\|_V^2 &= \|u-v\|_V^2 \\
&\leq \frac{1}{\lambda} < \mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u-v >_{V',V} \\
&= < f-g, u-v >_{V',V} \\
&\leq \|f-g\|_{V'}\|u-v\|_V \\
&= \|f-g\|_{V'}\|\mathcal{A}^{-1}f - \mathcal{A}^{-1}g\|_V,
\end{aligned}$$

und somit

$$\|\mathcal{A}^{-1}f - \mathcal{A}^{-1}g\|_V \leq \|f-g\|_{V'},$$

d.h. der Lösungsoperator $\mathcal{A}_1^{-1}$ ist stetig.

Wir wollen nun zeigen, dass für “genügend kleine“ Störungen 0-ter Ordnung $\Phi(x,u)$ der Satz von Zarantonello zur Lösung des Randwertproblems (RWP1) angewendet werden kann. Hinreichende Bedingungen an Φ die dies gewährleisten sind etwa die folgenden:

* $\Phi : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig,
* Φ ist gleichmässig Lipschitz stetig in der 2. Variablen, d.h.

$$\exists\, L > 0 \text{ so, dass } |\Phi(x,r) - \Phi(x,s)| \leq L|r-s| \qquad \forall x \in \Omega, \forall r,s \in \mathbb{R},$$

* Φ ist monoton wachsend in der 2. Variablen, d.h.

$$(\Phi(x,r) - \Phi(x,s))(r-s) \geq 0 \qquad \forall x \in \Omega, \forall r,s \in \mathbb{R}.$$

Wir leiten nun die schwache Formulierung des Randwertproblems (RWP1) her. Entsprechend dem ungestörten Problem ($\Phi = 0$) ist der geeignete Funktionenraum $V = H_0^1(\Omega)$. Die Abbildung $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$a(u,v) := \int_\Omega Du(x) \cdot Dv(x) + \Phi(x,u(x))v(x)\, dx$$

ist wohldefiniert und genügt der Abschätzung

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leq \left(\int_\Omega |Du|^2\, dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |Dv|^2\, dx\right)^{1/2} \\
&\qquad + \int_\Omega |\Phi(x,u) - \Phi(x,0)||v|\, dx + \int_\Omega |\Phi(x,0)||v|\, dx \\
&\leq \|u\|_{1,2}\|v\|_{1,2} + L\int_\Omega |u||v|\, dx + \sup_{x\in\Omega} |\Phi(x,0)| \int_\Omega |v|\, dx. \\
&\leq \|u\|_{1,2}\|v\|_{1,2} + L\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + \sup_{x\in\Omega} |\Phi(x,0)| \left(\int_\Omega 1\, dx\right)^{1/2} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C\|v\|_{1,2}
\end{aligned}$$

für eine nur von u, $\sup_{x\in\Omega} |\Phi(x,0)|$ und Ω abhängige Konstante C.
Somit ist für festes $u \in H_0^1(\Omega)$ die Abbildung $v \in H_0^1(\Omega) \mapsto a(u,v)$ linear und stetig,

d.h. ein Element in $H^{-1}(\Omega)$. Wir bezeichnen dieses mit $\mathcal{A}_1 u$. Somit erhalten wir einen nicht-linearen Operator

$$\begin{array}{lll} \mathcal{A}_1 : & H_0^1(\Omega) & \to H^{-1}(\Omega) \\ & u & \mapsto \mathcal{A}_1 u \end{array}$$

Die schwache Formulierung von (RWP1) lautet nun: zu gegebenem $f \in H^{-1}(\Omega)$ ist $u \in H_0^1(\Omega)$ gesucht so, dass für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ gilt:

$$a(u,v) = < f, v >_{H^{-1},H_0^1} .$$

Die äquivalente Operatorgleichung lautet dann: zu vorgegebenem $f \in H^{-1}(\Omega)$ ist $u \in H_0^1(\Omega)$ gesucht so, dass

$$\mathcal{A}_1 u = f.$$

Unter unseren Voraussetzungen an die Funktion Φ genügt der Operator den Voraussetzungen des Satzes von Zarantonello. In der Tat folgt wegen der Lipschitz-Stetigkeit von Φ:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_1 u - \mathcal{A}_1 v\|_{H^{-1}} &= \sup_{\substack{z \in H_0^1(\Omega) \\ \|z\|_{1,2} \le 1}} < \mathcal{A}_1 u - \mathcal{A}_1 v, z >_{H^{-1},H_0^1} \\ &= \sup_{\substack{z \in H_0^1(\Omega) \\ \|z\|_{1,2} \le 1}} \int_\Omega (Du - Dv) \cdot Dz + (\Phi(x,u) - \Phi(x,v)) z \, dx \\ &\le \sup_{\substack{z \in H_0^1(\Omega) \\ \|z\|_{1,2} \le 1}} \left(\int_\Omega |Du - Dv|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |Dz|^2 \, dx \right)^{1/2} + L \int_\Omega |u - v||z| \, dx \\ &\le \left(\int_\Omega |Du - Dv|^2 \, dx \right)^{1/2} + L \left(\int_\Omega |u - v|^2 \, dx \right)^{1/2} \\ &\le (L+1) \|u - v\|_{1,2} \end{aligned}$$

für alle $u, v \in H_0^1(\Omega)$, und somit ist $\mathcal{A}_1$ Lipschitz-stetig.
Da Φ monoton wachsend in der 2. Variablen, erhalten wir ausserdem für alle $u, v \in H_0^1(\Omega)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} < \mathcal{A}_1 u - \mathcal{A}_1 v, u - v > &= \int_\Omega |D(u-v)|^2 \, dx + \int_\Omega (\Phi(x,u) - \Phi(x,v))(u - v) \, dx \\ &\ge \int_\Omega |D(u-v)|^2 \, dx \\ &\ge c \|u - v\|_{1,2} \qquad \text{(Poincaré-Ungleichung)} \end{aligned}$$

für eine Konstante $c > 0$, und somit ist $\mathcal{A}_1$ stark monoton.
Aus dem Satz von Zarantonello folgt dann, dass das Randwertproblem (RWP1) für beliebig vorgegebenes $f \in H^{-1}(\Omega)$ eine eindeutige schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ besitzt. Zudem hängt die schwache Lösung stetig von der rechten Seite f ab.

Die Voraussetzungen an den Operator $\mathcal{A}$ im Satz von Zarantonello, starke Monotonie und Lipschitz-Stetigkeit, sind sehr restriktiv. Wir werden sehen, dass bereits unter weit schwächeren Voraussetzungen an einen Operator $\mathcal{A} : V \to V'$ dessen Bijektivität, oder zumindestens die Surjektivität, gewährleistet werden kann. Um dies zeigen zu können, benötigen wir aber einige Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis.

3.2 Exkurs: Funktionalanalysis

Zur Erinnerung:

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein reeller normierter Raum. Der Dualraum von X ist die Menge

$$X' := \{f : X \to \mathbb{R};\ f \text{ ist linear und stetig }\}.$$

Mit anderen Worten:

$$f \in X' \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ ist linear und beschränkt, d.h.}$$
$$\exists\, K > 0 \text{ so, dass } |f(x)| \le K\|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

Der Raum X' ausgestattet mit der Norm

$$\|f\|_{X'} := \sup_{\|x\|_X \le 1} |f(x)|$$

ist stets ein Banachraum.
Es gilt:

$$\|f\|_{X'} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \ne 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X = 1} |f(x)|.$$

Bemerkung: Der algebraische Dualraum, d.h. die Menge aller linearen Funktionale $\Phi : X \to \mathbb{R}$, ist vom topologischen Dualraum X' zu unterscheiden: wenn X unendlich-dimensional, dann existiert stets ein lineares unbeschränktes Funktional.

Von grundlegender Bedeutung in der Funktionalanalysis ist der

Satz 3.2 (Satz von Hahn-Banach (1926/29))
Seien Y ein linearer Teilraum des normierten linearen Raumes $(X, \|\cdot\|_X)$, $f : Y \to \mathbb{R}$ linear und stetig.
Dann gibt es eine lineare und stetige Fortsetzung $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ von f mit

$$\tilde{f}(y) = f(y) \qquad \forall y \in Y \quad \text{und} \quad \|\tilde{f}\|_{X'} = \|f\|_{Y'}.$$

Wichtige Folgerungen:

1) $\forall x \in X \setminus \{0\} \quad \exists\, f_x \in X'$ so, dass $f_x(x) = \|x\|_X$ und $\|f_x\|_{X'} = 1$.

Beweis: Seien $Y = \{\lambda x;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, $x \in X$ fest, und $g_x : Y \to \mathbb{R}$ definiert durch $g_x(y) = \lambda\|x\|_X$ für $y = \lambda x$. Offenbar ist g_x linear und beschränkt auf Y. Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert daher eine lineare und stetige Fortsetzung $f_x : X \to \mathbb{R}$ von g_x mit

$$\|f_x\|_{X'} = \|g_x\|_{Y'} = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \frac{|g_x(\lambda x)|}{\|\lambda x\|} = 1.$$

Da f_x Fortsetzung von g_x gilt insbesondere auch

$$f_x(x) = g_x(x) = \|x\|_X,$$

und somit erfüllt f_x die gesuchten Eigenschaften. $\square$

2) $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ $\exists\, f \in X'$ so, dass $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Man sagt: das Funktional f “trennt die Punkte x_1 und x_2“.

Beweis: folgt aus 1). $\square$

3) $\forall x \in X$ gilt:

$$\|x\|_X = \sup_{\substack{f\in X'\\ \|f\|_{X'}\leq 1}} |f(x)|.$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(\frac{x}{\|x\|_X})|\|x\|_X \qquad \text{(da } f \text{ linear)}\\ &\leq \sup_{\substack{y\in X\\ \|y\|_X\leq 1}} |f(y)|\|x\|_X \\ &= \|f\|_{X'}\|x\|_X \qquad \forall x \in X, f \in X', \end{aligned}$$

und somit

$$\sup_{\|f\|_{X'}\leq 1} |f(x)| \leq \|x\|_X \qquad \forall x \in X.$$

Andererseits gibt es für jedes $x \in X$ nach 2) ein Funktional f_x mit $f_x(x) = \|x\|_X$ und $\|f_x\|_{X'} = 1$. Deshalb $\|x\|_X = |f_x(x)| \leq \sup_{\|f\|_{X'}\leq 1} |f(x)|$. $\square$

Der *Bidualraum* X'' von X ist per Definition der Dualraum von $(X', \|\cdot\|_{X'})$, kurz: $X'' := (X')'$. Der Raum X'' ausgestattet mit der Norm

$$\|\varphi\|_{X''} = \sup_{\substack{f\in X'\\ \|f\|_{X'}\leq 1}} |\varphi(f)|$$

ist wieder ein Banachraum.

Bemerkenswert und von weitreichenden Konsequenzen ist die Tatsache, dass **jeder Banachraum X kanonisch in seinen Bidualraum X'' eingebettet werden kann**.

Beweis: Jedes $x \in X$ definiert ein stetiges lineares Funktional j_x auf X' via

$$\begin{aligned} j_x :\ & X' \to \mathbb{R}\\ & f \mapsto f(x) \end{aligned}$$

In der Tat ist die so definierte Abbildung j_x linear:

$$j_x(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha j_x(f) + \beta j_x(g)$$

für alle $f, g \in X'$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Ausserdem gilt

$$|j_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\|_{X'} \|x\|_X \qquad \forall f \in X',$$

und somit ist j_x beschränkt.
Wir können somit folgende Abbildung definieren:

$$j: \begin{array}{ll} X & \to X'' \\ x & \mapsto j_x \end{array} .$$

Offensichtlich ist j linear: für $x_1, x_2 \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} j_{\alpha x_1 + \beta x_2}(f) &= f(\alpha x_1 + \beta x_2) \\ &= \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \\ &= \alpha j_{x_1}(f) + \beta j_{x_2}(f) \\ &= (\alpha j_{x_1} + \beta j_{x_2})(f) \end{aligned}$$

für alle $f \in X'$, und somit

$$j(\alpha x_1 + \beta x_2) = j_{\alpha x_1 + \beta x_2} = \alpha j_{x_1} + \beta j_{x_2} = \alpha j(x_1) + \beta j(x_2).$$

Ausserdem gilt

$$\begin{aligned} \|j_x\|_{X''} &= \sup_{\substack{f \in X' \\ \|f\|_{X'} \leq 1}} |j_x(f)| \\ &= \sup_{\substack{f \in X' \\ \|f\|_{X'} \leq 1}} |f(x)| \\ &= \|x\|_X \quad \text{(Folgerung 3) aus dem Satz von Hahn-Banach)} \end{aligned}$$

für alle $x \in X$.

Die Abbildung j ist somit isometrisch (und daher insbesondere injektiv). Folglich ist X stetig in X'' eingebettet und kann als Teilraum von X'' aufgefasst werden. □

Die Abbildung j heisst die **„kanonische Abbildung“ von X nach X''**.

<u>**Bemerkung:**</u> Die Tatsache, dass X als Teilraum von X'' aufgefasst werden kann, motiviert auch die bereits eingeführte allgemein übliche “symmetrische Schreibweise“ von $f(x)$ mit Hilfe des Dualitätsproduktes (der Dualitätsklammer) $< \cdot, \cdot >$:

$$f(x) = < f, x > = < f, x >_{X', X} .$$

Verwenden wir diese Schreibweise, so ergibt sich die Gleichung

$$< j_x, f >_{X'', X'} = < f, x >_{X', X} \qquad \forall f \in X'.$$

Identifizieren wir x und j_x, so erhalten wir die (von einem üblichen Skalarprodukt in einem reellen Hilbertraum bekannte) symmetrische Relation $< x, f >=< f, x >$.

Definition 3.2
Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ heisst *reflexiv*, wenn die kanonische Abbildung surjektiv ist, d.h. $j(X) = X''$.

Bemerkungen:
1.) Da X'' als Dualraum vollständig ist, ist jeder reflexive Raum X vollständig.

2.) Ist X reflexiv, so kann X mit X'' identifiziert werden.
(Achtung: die Umkehrung gilt nicht! Es ist möglich, dass es eine lineare bijektive Abbildung $i : X \to X''$ gibt, somit also X und X'' identifiziert werden können, aber die kanonische Abbildung $j : X \to X''$ nicht surjektiv ist! Ein solches Beispiel findet man etwa in: R.C. James, *A non reflexive Banach space isometric with its secon conjugate space*, Proc. Nat. Acad. Sc. USA 37 (1951), 174–177.)

Beispiele reflexiver Räume:

* endlich-dimensionale Räume
* Hilberträume
* die Lebesgue-Räume $L^p(\Omega)$ für $1 < p < \infty$.
  (Erinnerung: $(L^p(\Omega))' = L^{p'}(\Omega)$, p' der zu p konjugierte Exponent: $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$)
* die Sobolevräume $W^{1,p}(\Omega)$ für $1 < p < \infty$
* die Folgenräume $l^p(\mathbb{N})$ für $1 < p < \infty$: $(l^p(\mathbb{N}))' = l^{p'}(\mathbb{N})$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ [1]

Satz 3.3
$(X, \|\cdot\|_X)$ ist reflexiv genau dann, wenn $(X', \|\cdot\|_{X'})$ reflexiv ist.

Beispiele nicht-reflexiver Räume:

* die Lebesgue-Räume $L^1(\Omega)$ und $L^\infty(\Omega)$
* die Folgenräume $l^1(\mathbb{N})$, $l^\infty(\mathbb{N})$, $c_0(\mathbb{N})$ (es ist $(c_0(\mathbb{N}))' = l^1(\mathbb{N})$, $(l^1(\mathbb{N}))' = l^\infty(\mathbb{N})$)[2]
* $C[a, b]$ bzw. $C(K)$, $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakte Menge

[1] für $1 \leq p < \infty$ ist $l^p(\mathbb{N})$ definiert als die Menge aller reellen Zahlenfolgen $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots) = (x_n)_n$ für die $\sum_{n=0}^\infty |x_n|^p < \infty$; $l^p(\mathbb{N})$ ausgestattet mit der Norm $\|(x_n)_n\|_{l^p} = (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{1/p}$ ist ein separabler Banachraum.

[2] $l^\infty(\mathbb{N})$ ist die Menge aller beschränkten reellen Zahlenfolgen; ausgestattet mit der Norm $\|(x_n)_n\|_{l^\infty} = \sup_n |x_n|$ ist $l^\infty(\mathbb{N})$ ein (nicht-separabler) Banachraum; $c_0(\mathbb{N})$ ist die Menge aller beschränkten reellen Zahlenfolgen $(x_n)_n$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$; als abgeschlossene Teilmenge von $(l^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_{l^\infty})$ ist $(c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|_{l^\infty})$ selbst wieder ein Banachraum

In einem Banachraum kann mit Hilfe des Dualraumes ein neuer Konvergenzbegriff definiert werden, der schwächer ist als der übliche Konvergenzbegriff in der Norm.

Definition 3.3
Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum.

1) Eine Folge $(x_n)_n \subset X$ *konvergiert stark gegen* $x \in X$, wenn gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_X = 0,$$

d.h. $(x_n)_n$ konvergiert in der Norm gegen x.

Notation: $x_n \to x$

2) Eine Folge $(x_n)_n \subset X$ *konvergiert schwach gegen* $x \in X$, wenn gilt:

$$\forall f \in X' \text{ gilt: } \lim_{n\to\infty} < f, x_n > = < f, x > .$$

Notation: $x_n \rightharpoonup x$.

Das Element x heisst *schwacher Grenzwert von* $(x_n)_n$.

Bemerkungen:

1.) Der schwache Grenzwert einer schwach konvergenten Folge ist eindeutig.

Beweis: Falls $x, \hat{x}$ schwache Grenzwerte von $(x_n)_n$, dann folgt insbesondere, dass $< f, x > = < f, \hat{x} >$ für alle $f \in X'$. Daraus folgt aber $x = \hat{x}$ wegen Folgerung 1) aus dem Satz von Hahn-Banach. □

2.) Wenn $x_n \rightharpoonup x$ in X, dann konvergiert auch jede beliebige Teilfolge von $(x_n)_n$ schwach gegen x in X.

3.) Falls $x_n \to x$ in X, dann $x_n \rightharpoonup x$ in X.

Beweis: $| < f, x_n - x > | \leq \|f\|_{X'} \|x_n - x\|_X \to 0 \; \forall f \in X'$. □

4.) Falls $x_n \rightharpoonup x$ in X, dann folgt:

$$(\|x_n\|_X)_n \text{ ist beschränkt und } \|x\|_X \leq \liminf_{n\to 0} \|x_n\|_X.$$

5.) Falls $x_n \rightharpoonup x$ in X, $\|x_n\|_X \to \|x\|_X$ und X ist ein Hilbertraum, dann folgt $x_n \to x$ in X.

6.)

$$x_n \rightharpoonup x \text{ in } X \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i) } (\|x_n\|)_n \text{ ist beschränkt} \\ \text{(ii) } \lim_{n\to\infty} < f, x_n > = < f, x > \quad \forall f \in M, \text{ wobei } M \subset X' \\ \qquad \text{mit } lin(M) \text{ (die lineare Hülle von } M\text{) dicht in } X' \end{cases}$$

Erinnerung: die lineare Hülle einer Menge $M \subset X$ ist definiert als die Menge aller endlichen Linearkombinationen von Elementen aus M.

7.) Falls $\dim(X) < \infty$, dann fallen die Begriffe der schwachen und der starken Konvergenz zusammen. Aber auch in $l^1(\mathbb{N})$ ist die schwache Konvergenz äquivalent zur starken Konvergenz.

8.) Wenn $x_n \rightharpoonup x$ in X und $f_n \to f$ in X' (d.h. stark in X'), dann folgt

$$< f_n, x_n > \to < f, x > .$$

9.) Ist $(x_n)_n \subset M$, M abgeschlossene konvexe Teilmenge von X und $x_n \rightharpoonup x$ in X, dann gilt schon $x \in M$.

Im allgemeinen folgt aus der schwachen Konvergenz nicht die starke Konvergenz, wie die folgenden Beispiele zeigen:

Beispiele:

1.) Sei $X = l^2(\mathbb{N})$ ausgestattet mit der Norm $\|x\|_{l^2} := \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2}$, $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$.
Betrachte

$$e^{(n)} \quad \text{mit} \quad e^{(n)} = 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n-teStelle}, 0, \ldots).$$

Dann ist

$$\|e^{(n)}\|_{l^2} = 1,$$

$$\|e^{(n)} - e^{(m)}\|_{l^2} = \begin{cases} 0 & , n = m \\ \sqrt{2} & , n \neq m \end{cases}$$

Somit ist $(e^{(n)})_n$ offensichtlich keine Cauchy-Folge in l^2 und somit nicht stark konvergent in l^2. Es gilt jedoch

$$e^{(n)} \rightharpoonup 0 = (0, 0, \ldots, 0, \ldots) \quad \text{in } l^2,$$

denn $(l^2(\mathbb{N}))' = l^2(\mathbb{N})$ und

$$(e^{(n)}, x)_{l^2} = x_n \to 0 \quad \text{für } n \to \infty, \quad \forall x = (x_0, x_1, \ldots) \in l^2(\mathbb{N})$$

(Erinnerung: damit $(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2)^{1/2}$ konvergiert, muss $(x_n)_n$ eine Nullfolge sein).

Beobachtung: Der Raum l^2 ist reflexiv und $(e^{(n)})_n \subset l^2$ ist beschränkt! (vgl. mit Satz 3.4 unten)

2.) Sei $X = L^2(\mathbb{R})$ ausgestattet mit der Norm $\|v\|_{L^2} := \left(\int_{\mathbb{R}} |v(x)|^2 \, dx\right)^{1/2}$. $(\cdot, \cdot)$ bezeichne das die $\|\cdot\|_{L^2}$-Norm erzeugende Skalarprodukt in $L^2(\mathbb{R})$.
Betrachte die Funktionenfolge $(u_n)_n$ mit

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \chi_{(n,2n)}(x), \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

(Hierbei ist für eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ χ_A die Indikatorfunktion von A definiert durch $\chi_A(x) = 1$ wenn $x \in A$, $\chi_A(x) = 0$ sonst.)
Dann gilt:

* $\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left(\int_n^{2n} \frac{1}{n}\, dx\right)^{1/2} = 1$,

* $(u_n)_n$ ist keine Cauchy-Folge in $L^2(\mathbb{R})$, denn für alle $m \in \mathbb{N}$ gerade, $n = \frac{3}{2}m$ gilt:

$$\begin{aligned}
\|u_n - u_m\|_{L^2}^2 &= \int_m^{2m} \frac{1}{m}\, dx - 2\int_{\frac{3}{2}m}^{2m} \frac{1}{\sqrt{m}}\sqrt{\frac{2}{3m}}\, dx + \int_{\frac{3}{2}m}^{3m} \frac{2}{3m}\, dx \\
&= 1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} + 1.
\end{aligned}$$

  Allerdings gilt

* $u_n \rightharpoonup u \equiv 0$ in $L^2(\mathbb{R})$, denn, für alle $f \in L^2(\mathbb{R})$, gilt:

$$\begin{aligned}
< f, u_n >_{(L^2(\mathbb{R}))', L^2(\mathbb{R})} &= (f, u_n)_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x) u_n(x)\, dx \\
&= \int_n^{2n} \frac{1}{\sqrt{n}} f(x)\, dx \\
&\leq \left(\int_n^{2n} \frac{1}{n}\, dx\right)^{1/2} \left(\int_n^{2n} |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2} \\
&= 1 \cdot \left(\int_n^{2n} |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_n^{+\infty} |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2} \\
&\to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Beobachtung:

* $L^2(\mathbb{R})$ ist reflexiv
* $(u_n)_n$ ist beschränkt in $L^2(\mathbb{R})$
* $u_n \rightharpoonup 0$ in $L^2(\mathbb{R})$, aber nicht stark in $L^2(\mathbb{R})$

Auf dem Dualraum X' kann analog wie in X eine schwache Konvergenz definiert werden. Diese wird durch den Bidualraum erzeugt: seien $(f_n)_n, f \in X'$; dann

$$(f_n)_n \rightharpoonup f \qquad \text{in } X'$$

genau dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty} < g, f_n >_{X'', X'} = < g, f >_{X'', X'} \qquad \forall g \in X''.$$

Auf einem Dualraum X' kann aber noch ein weiterer verallgemeinerter Konvergenzbegriff erklärt werden, die sog. schwach$*$-Konvergenz, die durch den Primalraum X erzeugt wird:

Definition 3.4
Sei $(X', \|\cdot\|_{X'})$ der Dualraum des normierten Raumes $(X, \|\cdot\|_X)$.
Eine Folge $(f_n)_n \subset X'$ *konvergiert schwach$*$ gegen* $f \in X'$ genau dann, wenn gilt:

$$\forall x \in X: \qquad \lim_{n\to\infty} < f_n, x >_{X',X} = < f, x >_{X',X} .$$

Notation: $f_n \rightharpoonup_* f$

<u>**Bemerkung:**</u> Falls X reflexiv ist, fallen die Begriffe der schwachen und der schwach$*$-Konvergenz zusammen, d.h.

$$f_n \rightharpoonup f \quad \text{in } X' \;\Leftrightarrow\; f_n \rightharpoonup_* f \quad \text{in } X'.$$

Nach dem Kompaktheitssatz von F. Riesz gilt das Auswahlprinzip von Bolzano-Weierstrass dann und nur dann, wenn $\dim X < \infty$. Einen Ausweg in reflexiven Räumen bietet der

Satz 3.4 (Eberlein-Šmulian)
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Dann gilt:

X ist reflexiv $\Leftrightarrow$ jede beschränkte Folge besitzt eine <u>schwach</u> konvergente Teilfolge.

Ein ähnliches Resultat gilt für Dualräume:

Satz 3.5
Sei X ein separabler normierter Raum.
Dann besitzt jede in X' beschränkte Folge $(f_n)_n$ eine schwach$*$-konvergente Teilfolge.

<u>Bemerkung:</u> Auf die Voraussetzung, dass X separabel ist, kann im vorhergehenden Satz nicht verzichtet werden.
Es gilt zwar stets, dass die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B_1(0)} = \{f \in X'; \|f\|_{X'} \leq 1\}$ in dem Dualraum eines beliebigen Banachraumes schwach*-kompakt ist (Satz von Banach-Alaoglu-Bourbaki). Kompaktheit ist aber nur in metrischen Räumen äquivalent zur Folgenkompaktheit. Die schwach*-Topologie auf X' ist nur dann (auf der Einheitskugel X') metrisierbar (d.h. kann durch eine Metrik erzeugt werden), wenn eben X separabel ist.

Nützlich ist oft folgendes Teilfolgenprinzip:

Satz 3.6
Sei X ein reflexiver Banachraum.
Besitzen alle schwach konvergenten Teilfolgen einer beschränkten Folge $(x_n)_n \subset X$ ein und denselben Limes $x \in X$, dann konvergiert die gesamte Folge $(x_n)_n$ schwach gegen x in X.

Beweis:
durch Widerspruch: angenommen, $(x_n)_n$ konvergiert nicht schwach gegen x in X. Dann existiert $\epsilon > 0$, eine aufsteigende Folge $(n_k)_k$ mit $n_k \to \infty$ und ein $f \in X'$ so, dass

$$| < f, x_{n_k} >_{X',X} | \geq \epsilon \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Nach Voraussetzung ist aber $(x_n)_n$ beschränkt, und somit auch die Teilfolge $(x_{n_k})_k$. Nach dem Satz von Eberlein-Šmulian besitzt daher $(x_{n_k})_k$ eine schwach konvergente Teilfolge, da X reflexiv ist. Nach Voraussetzung konvergiert diese Teilfolge, nennen wir sie $(x_{n'_k})_k$, schwach gegen denselben Limes x. Andererseits gilt für die Teilfolge aber auch die Ungleichung (3.2). Dies ist ein Widerspruch. □

Bemerkung: Man überlegt sich leicht, dass das Teilfolgenprinzip in nicht-reflexiven Räumen i.a. nicht gilt.

In Dualräumen gilt allerdings ein analoges Teilfolgenprinzip für die schwach$*$-Konvergenz:

Satz 3.7
Sei X ein separabler normierter Raum.
Besitzen alle schwach$*$-konvergenten Teilfolgen einer beschränkten Folge $(f_n)_n \subset X'$ ein und denselben Limes $f \in X'$, dann konvergiert die gesamte Folge $(f_n)_n$ schwach$*$ gegen f in X'.

Bemerkung: Auf die Voraussetzung, dass X separabel ist, kann im Satz 3.7 nicht verzichtet werden (vgl. Bemerkung nach Satz 3.5.

Beispiele:

1.) Im Banachraum $X = L^1(\Omega)$, $\Omega =]0,1[$, ausgestattet mit der Norm $\|v\|_{L^1(\Omega)} = \int_0^1 |v(x)|\, dx$ betrachte die Funktionenfolge $(u_n)_n$ definiert durch

$$u_n(x) = \begin{cases} n(1-nx) & , x \in]0, 1/n] \\ 0 & , x \in [1/n, 1[\end{cases}$$

Es ist

$$\|u_n\|_{L^1(\Omega)} = \int_0^{1/n} n(1-nx)\, dx = \frac{1}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

(Dreiecksfläche) und

$$\int_0^1 u_n(x)\varphi(x)\, dx \to 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset L^1(\Omega).$$

Da $\mathcal{D}(\Omega)$ dicht in $L^1(\Omega)$, folgt: wenn die Folge $(u_n)_n$ schwach konvergent ist, dann muss ihr schwacher Grenzwert $u \equiv 0$ sein.
Aber

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 u_n(x) \cdot \underbrace{1}_{\in L^\infty(0,1) = (L^1(0,1))'} dx = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 u(x) \cdot 1\, dx$$

und somit ist $(u_n)_n$ nicht schwach konvergent.
Mit dem gleichen Argument folgt, dass $(u_n)_n$ - obgleich beschränkt - keine schwach konvergente Teilfolge besitzt.
Schlussfolgerung: $L^1(\Omega)$ ist nicht reflexiv!

2.) Wir betrachten nun im Banachraum $L^\infty(\Omega)$, $\Omega =]0,1[$, ausgestattet mit der Supremums-Norm $\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = ess - sup_{x\in(\Omega)}$ die Funktionenfolge $(u_n)_n$ definiert durch

$$u_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & , x \in]0, 1/n] \\ 0 & , x \in [1/n, 1[\end{cases} .$$

Es ist

$$\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Für $m < n$ ist ausserdem

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|_{L^\infty(\Omega)} &= (u_m(x) - u_n(x))_{|x=1/n} \\ &= 1 - \frac{m}{n}. \end{aligned}$$

Wähle z.B. $n = 2m$, dann ist $\|u_m - u_{2m}\|_{L^\infty(\Omega)} = 1/2 \nrightarrow 0$. Folglich ist $(u_n)_n$ nicht stark konvergent in $L^\infty(\Omega)$.
Es ist aber $L^\infty(\Omega) = (L^1(\Omega))'$ und $L^1(\Omega)$ ist separabel. Nach dem Satz 3.5 besitzt $(u_n)_n$ aber eine schwach$*$-konvergente Teilfolge. Sei nun $(u_{n_k})_k$ eine schwach$*$-konvergente Teilfolge, u ihr schwach$*$-Grenzwert. Für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ist dann

$$\int_0^1 u_{n_k}(x)\varphi(x)\,dx = \int_0^{1/n_k} (1 - n_k x)\varphi(x)\,dx = 0$$

für n_k genügend gross, da dann $[0, 1/n_k] \cap \operatorname{supp}\varphi = \emptyset$. Es folgt, das $\int_0^1 u(x)\varphi(x)\,dx = \lim \int_0^1 u_{n_k}(x)\varphi(x)\,dx = 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
Nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung ist somit $u \equiv 0$ f.ü. auf $(0,1)$. Da die Teilfolge $(u_{n_k})_k$ beliebig gewählt war, haben wir damit gezeigt, dass alle schwach$*$-konvergenten Teilfolgen gegen ein und denselben Grenzwert $u \equiv 0$ konvergieren. Nach dem Teilfolgenprinzip Satz 3.7 gilt dann, dass die gesamte Folge $(u_n)_n$ schwach$*$ gegen $u \equiv 0$ konvergiert.

Häufig ist es nützlich (bzw. sogar notwendig) beim Studium von PDEs mit verschiedenen Banachräumen gleichzeitig zu arbeiten. Auf die Bedeutung von kompakten Einbettungssätzen haben wir in diesem Zusammenhang schon früher hingewiesen. Es ist dann ebenfalls wichtig, zu wissen, wie sich die Dualräume von verschiedenen Banachräumen X und Y zueinander verhalten, wenn die Räume X und Y selbst etwa stetig, oder sogar kompakt, ineinander eingebettet sind. Betrachten wir eine solche Situation:

Gegeben seien zwei Banachräume $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$, die stetig ineinander eingebettet sind: $X \hookrightarrow Y$. Somit können wir X als Teilraum von Y auffassen. Damit ist klar, dass dann jedes Element $f \in Y'$ - als Einschränkung auf X - auch ein Element in X' ist. Falls X sogar dicht in Y liegt, ist die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} Y' &\to X' \\ f &\mapsto f_{|X} \end{aligned} \tag{3.3}$$

sogar injektiv, denn

$$\begin{aligned} f_{|X} = g_{|X} \quad &\Rightarrow \quad < f, x > = < g, x > \qquad \forall x \in X \\ &\Rightarrow \quad < f, y > = < g, y > \qquad \forall y \in Y = \overline{X} \quad \text{(Dichteschluss)} \\ &\Rightarrow \quad f = g \qquad \text{auf } Y. \end{aligned}$$

Notation: $X \hookrightarrow^d Y$, falls $X \hookrightarrow Y$ und X dicht in Y.

Schlussfolgerung: Falls $X \hookrightarrow^d Y$, dann gilt $Y' \hookrightarrow X'$.

Bemerkung: Falls $X \hookrightarrow Y$, aber $\overline{X} \neq Y$, dann ist die Abbildung (3.3) nicht injektiv.

Beispiel: $X := H_0^1(a,b) \hookrightarrow Y := H^1(a,b)$, aber $H_0^1(\Omega)(= \overline{\mathcal{D}(a,b)}^{\|\cdot\|_{1,2}})$ ist nicht dicht in $H^1(a,b)$.
Für jedes $\xi \in [a,b]$ ist das Dirac-Mass $\delta_\xi \in (H^1(a,b))'$, denn

$$\begin{aligned} | < \delta_\xi, v > | &= |v(\xi)| \\ &\leq \max_{x \in [a,b]} |v(x)| \\ &\leq const \|v\|_{1,2} \qquad \text{da } H^1(a,b) \hookrightarrow C([a,b]). \end{aligned}$$

Insbesondere sind $\delta_a, \delta_b \in H^1(a,b)$, $\delta_a \neq \delta_b$, aber $\delta_{a|X} = \delta_{b|X} = 0$.

Bemerkung: Falls $X \hookrightarrow^d Y$ und X reflexiv, dann ist auch $Y' \hookrightarrow^d X'$.

Für die Untersuchung von Evolutionsproblemen wird später noch spezielle folgende Situation von Bedeutung sein:

Gegeben sind $(V, \|\cdot\|_V)$ ein reflexiver Banachraum und $(H, (\cdot,\cdot))$ ein Hilbertraum so, dass $V \hookrightarrow^d H$.
Gemäss der letzten Bemerkung ist dann $H' \hookrightarrow^d V'$. Da wir nach dem Satz von Riesz H und H' identifizieren können, liegt dann folgende Situation vor:

$$V \hookrightarrow^d H \hookrightarrow^d V'.$$

Ein solches Tripel (V, H, V') heisst **„Gelfand-Dreier“** oder **„Evolutionstripel“**.
In einer solchen Situation gilt dann:

$$< f, v >_{V',V} = (f, v) \qquad \forall v \in V, f \in H,$$

und

$$< w, v >_{V',V} = (w, v) = (v, w) = < v, w >_{V',V} \qquad \forall v, w \in V,$$

wobei wir die Elemente stets mit den entsprechenden Bildern der jeweiligen Einbettung identifizieren.

Beispiele:

1.) Für beliebiges beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ gilt:

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow^d L^2(\Omega) \hookrightarrow^d H^{-1}(\Omega)$$

(die Einbettungen sind hier jeweils sogar kompakt!).

2.) Allgemeiner gilt für jedes beschränkte Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^N$:

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow^d L^2(\Omega) \hookrightarrow^d W^{-1,p'}(\Omega)(= (W_0^{1,p}(\Omega))')$$

für alle $2 \leq p < \infty$ (und auch sind die Einbettungen jeweils wieder kompakt)

3.3 Monotonie- und Fixpunktmethoden

Die Voraussetzungen der starken Monotonie und der Lipschitz-Stetigkeit des nichtlinearen Operators $\mathcal{A} : V \to V'$ im Satz von Zarantonello sind, wie bereits bemerkt, sehr restriktiv.
Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, dass auch unter schwächeren Bedingungen ein nicht-linearer Operator $\mathcal{A} : V \to V'$ schon bijektiv, oder zumindestens surjektiv, sein kann.

Betrachten wir zunächst den trivialen Fall, dass $V = V' = \mathbb{R}$ und $\mathcal{A}$ durch eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert ist. In diesem Fall ist bekannt, dass

$$\left\{ \begin{array}{l} g \text{ stetig, strikt monoton,} \\ \lim_{u \to \pm\infty} g(u) = \pm\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \quad g \text{ bijektiv.}$$

Die strikte Monotonie sichert hierbei die Injektivität der Abbildung. Die Stetigkeit zusammen mit der Wachstumsbedingung im unendlichen sichert bereits die Surjektivität (dies folgt aus dem Zwischenwertsatz)

$$\left\{ \begin{array}{l} g \text{ stetig} \\ \lim_{u \to \pm\infty} g(u) = \pm\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \quad g \text{ surjektiv}$$

Unser Ziel ist es, geeignete Monotonie- und Stetigkeitsbedingungen für einen nichtlinearen Operator $\mathcal{A} : V \to V'$ in einem unendlich-dimensionalen Banachraum V zu finden, so dass analoge Resultate für den Operator $\mathcal{A}$ gelten.

Wir führen dazu zunächst verschiedene Monotoniebegriffe ein.

Definition 3.5
Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein Banachraum, $\mathcal{A} : V \to V'$ ein nicht-linearer Operator. Dann heisst $\mathcal{A}$

* *monoton*, wenn

$$< \mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v >_{V',V} \geq 0 \qquad \forall u, v \in V;$$

* *strikt monoton*, wenn

$$< \mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v >_{V',V} > 0 \qquad \forall u, v \in V, u \neq v;$$

* *koerzitiv*, wenn

$$\frac{< \mathcal{A}u, u >_{V',V}}{\|u\|_V} \to +\infty, \quad \text{wenn } \|u\|_V \to +\infty.$$

Bemerkungen:

1.) Offensichtlich gelten die Implikationen:

$$\mathcal{A} \text{ stark monoton} \Rightarrow \mathcal{A} \text{ strikt monoton} \Rightarrow \mathcal{A} \text{ monoton.}$$

Ausserdem impliziert die starke Monotonie die Koerzivität:

$$\begin{aligned} \frac{< \mathcal{A}u, u >}{\|u\|_V} &= \frac{< \mathcal{A}u - \mathcal{A}0, u - 0 >}{\|u\|_V} + \frac{< \mathcal{A}0, u >}{\|u\|_V} \\ &\geq \lambda \|u\|_V - \|\mathcal{A}0\|_{V'} \\ &\to \infty \qquad \text{wenn } \|u\|_V \to \infty. \end{aligned}$$

2.) Falls $V = V' = \mathbb{R}$ und $\mathcal{A}$ durch eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert, dann gilt offensichtlich:

* $\mathcal{A}$ ist monoton, genau dann wenn g monoton wachsend auf $\mathbb{R}$;
* $\mathcal{A}$ ist strikt monoton, genau dann wenn g strikt monoton wachsend auf $\mathbb{R}$;
* $\mathcal{A}$ ist koerzitiv, genau dann wenn $\lim_{u \to \pm\infty} g(u) = \pm\infty$.

Betrachten wir an dieser Stelle wieder unsere Beispiele (RWP1)-(RWP3).

Beispiel (RWP1)

Es ist offensichtlich, dass der nicht-lineare Operator $\mathcal{A}_1 : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ definiert durch

$$< \mathcal{A}_1 u, v >= \int_\Omega Du \cdot Dv + \Phi(x, u) v \, dx, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

für eine beliebige Funktion $\Phi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (mit der Eigenschaft, dass der Operator $\mathcal{A}_1$ wenigstens wohldefiniert ist) im allgemeinen nicht monoton und auch nicht koerzitiv

ist. Beispiel: $\Phi(x,u) = -u$.
Ist Φ allerdings monoton wachsend in der 2. Variablen, dann ist $\mathcal{A}_1$ schon stark monoton und auch koerzitiv.

Beispiel (RWP2)

Wir wollen voraussetzen, dass die Koeffizientenfunktion $A : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N\times N}$ vom *Caratheodory-Typ* ist, d.h.

für alle $r \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $x \mapsto A(x,r)$ messbar

für fast alle $x \in \Omega$ ist die Funktion $r \mapsto A(x,r)$ stetig.

Weiter nehmen wir an, dass die Komponentenfunktionen von $A = (a_{ij})_{ij}$ wesentlich beschränkt sind:

$$a_{ij} \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}) \qquad \forall i,j = 1,\dots,N. \tag{3.4}$$

Unter dieser Voraussetzung sehen wir leicht, dass die schwache Integralformulierung von (RWP2)

$$\int_\Omega A(x,u)Du \cdot Dv\,dx = \int_\Omega fv\,dx$$

für alle $u,v \in H_0^1(\Omega)$ sinnvoll definiert ist, und die rechte Seite f sogar in $H^{-1}(\Omega)$ liegen darf.
Der zugehörige nicht-lineare Operator $\mathcal{A}_2 : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ ist definiert durch

$$< \mathcal{A}_2 u, v >= \int_\Omega A(x,u)Du \cdot Dv\,dx, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Ohne zusätzliche Voraussetzungen an die Koeffizientenfunktion $A(x,u)$ ist $\mathcal{A}_2$ jedoch weder monoton noch koerzitiv.
Setzen wir zusätzlich voraus (vgl. Elliptizitätsbedingung), dass gilt:

$$\exists\,\lambda > 0 : \quad \xi^t A(x,u)\xi \geq \lambda|\xi|^2 \quad \forall u \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^N,\ \text{f.ü. } x \in \Omega, \tag{3.5}$$

dann ist $\mathcal{A}_2$ koerzitiv, aber trotzdem i.a. nicht monoton.
Es gibt keine sinnvolle Bedingung an die Koeffizientenfunktion $A(x,u)$, unter der $\mathcal{A}_2$ monoton ist.

Beispiel (RWP3)

Betrachten wir die (formal hergeleitete) schwache Integralformulierung der PDE:

$$\int_\Omega |Du|^{p-2}Du \cdot Dv\,dx = \int_\Omega fv\,dx, \qquad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Man überlegt sich leicht, dass $V = W^{1,p}(\Omega)$ der geeignete Sobolev-Raum ist, für den obige Integralformulierung wohldefiniert ist für alle $u,v \in V$, und dies sogar für rechte Seiten $f \in W^{-1,p'}(\Omega) = (W_0^{1,p}(\Omega))'$ (immer vorausgesetzt natürlich, man ersetzt das Integral durch die entsprechende Dualitätsklammer: $< f,v >$).
Betrachte die Abbildung

$$\begin{array}{lll} a_3 : & W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,p}(\Omega) & \to \mathbb{R} \\ & (u,v) & \mapsto \int_\Omega |Du|^{p-2}Du \cdot Dv\,dx \end{array}$$

Für festes $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ist die Abbildung $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \mapsto a_3(u,v)$ linear und stetig:

$$\begin{aligned} |a_3(u,v)| &\leq \int_\Omega |Du|^{p-1}|Dv|\,dx \\ &\leq \left(\int_\Omega |Du|^p\,dx\right)^{1/p'} \left(\int_\Omega |Dv|^p\,dx\right)^{1/p} \\ &\leq const(u)\|v\|_{1,p}, \end{aligned}$$

also ein Element $=: \mathcal{A}_3 u$ in $W^{-1,p'}(\Omega)$. Der so definierte nicht-lineare Operator

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_3 : \quad W_0^{1,p}(\Omega) &\to W^{-1,p'}(\Omega) \\ u &\mapsto \mathcal{A}_3 u \end{aligned}$$

ist strikt monoton und koerzitiv (Beweis: Übung).

Als nächstes wollen wir geeignete Stetigkeitsbegriffe für nicht-lineare Operatoren einführen. Wir beginnen mit

Definition 3.6
Seien X, Y Banachräume, $M \subset X$ eine nicht-leere Teilmenge, $\mathcal{A} : M \to Y$ ein Operator. Dann heisst $\mathcal{A}$

* *beschränkt*, wenn $\mathcal{A}$ beschränkte Teilmengen von M in beschränkte Teilmengen von Y abbildet.
* *stetig*, wenn

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_n)_n, u \subset M \\ u_n \to u \text{ stark in } X \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \mathcal{A}u_n \to \mathcal{A}u \text{ stark in } Y.$$

* *kompakt*, wenn $\mathcal{A}$ stetig ist und ausserdem $\mathcal{A}$ beschränkte Teilmengen von M in relativ kompakte Teilmengen von Y abbildet.

Bemerkungen:

1.) Falls $\mathcal{A} : X \to Y$ linear, dann gilt: $\mathcal{A}$ ist beschränkt, genau dann wenn $\mathcal{A}$ stetig.

Für nicht-lineare Operatoren gilt diese Äquivalenz nicht: beschränkte nicht-lineare Operatoren sind natürlich nicht notwendigerweise stetig.
Aber auch die umgekehrte Implikation gilt i.a. nicht (siehe etwa Beispiel 7.1.7 in E. Emmrich, Gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen).

2.) Falls $\dim(Y) < \infty$, dann gilt: $\mathcal{A}$ ist stetig und beschränkt genau dann, wenn $\mathcal{A}$ kompakt.
Beweis: $\Leftarrow$: gilt immer.
$\Rightarrow$: $\mathcal{A}$ ist stetig nach Voraussetzung. Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{A}$ beschränkte Mengen in relativ kompakte Mengen abbildet. Sei dazu E eine beschränkte Teilmenge von M; da $\mathcal{A}$ beschränkt ist $\mathcal{A}(E)$ eine beschränkte Teilmenge von Y. Dann ist aber $\overline{\mathcal{A}(E)}$ beschränkt und abgeschlossen in Y. Da Y endlich-dimensional, ist $\overline{\mathcal{A}(E)}$ somit kompakt. $\square$

3.) Falls $\dim\ X < \infty$ und M abgeschlossene Teilmenge von X, dann gilt: $\mathcal{A}$ ist

stetig genau dann, wenn $\mathcal{A}$ kompakt.
Beweis: $\Leftarrow$ ist trivial.
$\Rightarrow$: Wir müssen nur zeigen, dass $\mathcal{A}$ beschränkte Teilmengen in relativ kompakte Mengen abbildet, d.h. dass aus der Bildfolge jeder beschränkten Folge eine konvergente Teilfolge ausgewählt werden kann. Sei dazu also $(u_n)_n$ eine beliebige beschränkte Folge in M. Da $\dim X < \infty$, enthält $(u_n)_n$ nach dem Auswahlprinzip von Bolzano-Weierstrass eine konvergente Teilfolge $(u_{n_k})_k$. Sei u der Grenzwert dieser Teilfolge. Da M abgeschlossen, gilt $u \in M$. Da $\mathcal{A}$ stetig, folgt $\mathcal{A}u_{n_k} \to \mathcal{A}u$, und somit enthält die Bildfolge $(\mathcal{A}u_n)_n$ eine konvergente Teilfolge. □

4.) Falls $\dim X = \dim Y = \infty$, dann gibt es stetige beschränkte Abbildungen, die nicht kompakt sind (vgl. Beispiel nach Satz von Brouwer weiter unten).

Kompaktheitseigenschaften spielen eine wichtige Rolle bei der Anwendung von Fixpunktmethoden. Wir haben bereits in der Vorlesung DGLI gesehen, wie mit Hilfe

* des Fixpunktsatzes von Schauder die Existenz einer Lösung einer gewöhnlichen DGL $y' = f(t, y)$ mit stetiger rechter Seite f
* des Banach'schen Fixpunktsatz Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung einer gewöhnlichen DGL $y' = f(t, y)$ mit lokal Lipschitz stetiger rechter Seite f

gezeigt werden kann.
Fixpunktmethoden spielen auch eine wesentliche Rolle bei der Lösung von partiellen Differentialgleichungen.

Der wohl einfachste „Fixpunktsatz“ ist das folgende aus der reellen Analysis bekannte (auf dem Zwischenwertsatz/Satz von Rolle beruhende) Resultat:

Jede stetige Funktion $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ besitzt mindestens einen Fixpunkt.

Von weitreichender Bedeutung ist die Tatsache, dass ein analoges Resultat in beliebigen endlich-dimensionalen Räumen gilt.

Satz 3.8 (Fixpunktsatz von Brouwer, 1912)
Jede stetige Abbildung $\Phi : \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^N \to \overline{B_1(0)}$ besitzt mindestens einen Fixpunkt.

Hierbei bezeichnet $\overline{B_1(0)} = \{x \in \mathbb{R}^N;\ \|x\| \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskugel im $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$.

Bemerkungen:

1.) Ein analoges Resultat gilt in beliebigen endlich-dimensionalen Banachräumen für Mengen M, die homöomorph zur Einheitskugel sind. Dies sind z.B. alle nichtleeren konvexen kompakten Mengen des $\mathbb{R}^N$.

2.) Der Beweis des Satzes von Brouwer ist schwierig und erfordert tiefergehende topologische Kenntnisse. Zwei Beweisvarianten findet man etwa in M. Ružička, Nichtlineare Funktionalanalysis.

3.) Der Fixpunktsatz gilt **nicht** in unendlich-dimensionalen Räumen!

Beispiel:

Im (unendlich-dimensionalen) Banachraum $X = l^2(\mathbb{N}) = \{x = (x_0, x_1, x_2, \ldots);\ x_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ ausgestattet mit der Norm $\|x\|_{l^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2}$ betrachten wir die Abbildung $\Phi : \overline{B_1(0)} \to \overline{B_1(0)}$ definiert durch

$$\Phi(x) = \Phi((x_n)_n) = (\sqrt{1 - \|x\|_{l^2}^2}, x_0, x_1, x_2, \ldots)$$

für alle $x \in \overline{B_1(0)} = \{x \in l^2(\mathbb{N});\ \|x\|_{l^2} \leq 1\}$.
Wir bemerken, dass

$$\|\Phi(x)\|_{l^2} = (1 - \|x\|_{l^2}^2) + \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 = 1 \qquad \forall x \in \overline{B_1(0)}. \tag{3.6}$$

Dies zeigt, dass Φ in der Tat wohldefiniert und eine Selbstabbildung der abgeschlossenen Einheitskugel von l^2 in sich selbst ist (tatsächlich bildet Φ sogar in die Sphäre $\{x \in l^2(\mathbb{N});\ \|x\|_{l^2} = 1\}$ ab).
Φ ist ausserdem stetig, denn

$$\left\{ \begin{array}{l} (x^{(n)})_n, x \subset l^2(\mathbb{N}) \\ \|x^{(n)} - x\|_{l^2} \to 0 \end{array} \right\}$$
$$\Rightarrow \quad \|\Phi(x^{(n)}) - \Phi(x)\|_{l^2}^2 = (\sqrt{1 - \|x^{(n)}\|_{l^2}} - \sqrt{1 - \|x\|_{l^2}})^2 + \|x^{(n)} - x\|_{l^2}^2 \to 0.$$

Die Abbildung Φ besitzt aber keinen Fixpunkt. Beweis durch Widerspruch: angenommen Φ besitzt einen Fixpunkt in $x \in \overline{B_1(0)}$. Es gilt somit

$$x = \Phi(x)$$

und wegen (3.6)

$$\|x\| = 1. \tag{3.7}$$

Folglich erhalten wir für die Komponenten von x die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_0 &= (\Phi(x))_0 = \sqrt{1 - \|x\|_{l^2}} = 0, \\ x_1 &= (\Phi(x))_1 = x_0 = 0, \\ x_2 &= (\Phi(x))_2 = x_1 = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Sukzessive erhalten wir so $x_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $\|x\|_{l^2} = 0$ und somit einen Widerspruch zu (3.7).

In unendlich-dimensionalen Räumen X kann die Existenz eines Fixpunktes einer stetigen Selbstabbildung $\Phi : M \subset X \to M$ nur unter einer zusätzlichen Kompaktheitsbedingung nachgewiesen werden.

Satz 3.9 (Fixpunktsatz von Schauder, Version 1 (1930))
Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $M \subset X$ eine nicht-leere konvexe und kompakte Menge. Dann besitzt jede stetige Abbildung $\Phi : M \to M$ mindestens einen Fixpunkt.

Bemerkung: Der Satz von Brouwer ist quasi ein Spezialfall des Satzes von Schauder, da die abgeschlossene Einheitskugel in einem endlich-dimensionalen Banachraum stets nicht-leer, konvex und kompakt ist.

Alternativ kann die Kompaktheitsbedingung nicht in die Menge M, sondern in den „Operator gesteckt werden"

Satz 3.10 (Satz von Schauder, 2. Version)
Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $M \subset X$ eine nicht-leere konvexe, beschränkte und abgeschlossene Menge. Dann besitzt jede kompakte Abbildung $\Phi : M \to M$ mindestens einen Fixpunkt.

Die 2. Version folgt leicht aus der 1. Version des Satzes von Schauder:

Beweis (Satz 3.10):
Da M beschränkt und Φ kompakt, ist $\Phi(M)$ relativ kompakt in X. Dann folgt mit einem Satz aus der Funktionalanalysis (Satz von Mazur), dass die abgeschlossene konvexe Hülle $N := \overline{co(\Phi(M))}$ [3] kompakt in X ist. Da M konvex und abgeschlossen, ist $N \subset M$. Ausserdem gilt, dass Φ eingeschränkt auf N wieder in N abbildet. Die Menge N und die Abbildung $\Phi : N \to N$ erfüllen somit die Voraussetzungen vom Satz 3.9 und somit folgt die Behauptung aus dem Satz von Schauder, Version 1. □

Beweis (Schauder, 1. Version):
Der Satz beruht auf dem Fixpunktsatz von Brouwer und der Möglichkeit, kompakte Operatoren durch „endlich-dimensionale" Operatoren zu approximieren.

1.Schritt: Wir beweisen zunächst

[3] die konvexe Hülle einer Menge $A \subset X$ ist definiert als die Menge aller endlichen Linearkombinationen $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ mit $0 \leq \alpha_i \leq 1$, $x_i \in A$ für alle i und $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.

Lemma 3.1
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, $M \subset X$ eine nicht-leere beschränkte Teilmenge, $\Phi : M \to X$ ein kompakter Operator.
Dann gilt:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\ \text{ ein kompakter Operator } \Phi_n : M \to X$$

mit den Eigenschaften

$$\|\Phi_n(x) - \Phi(x)\|_X \leq \frac{1}{n} \qquad \forall x \in M$$

und

$$\dim\ (lin(\Phi_n(M)) < \infty.$$

Beweis: Da M beschränkt und Φ kompakt, ist $\Phi(M)$ eine relativ kompakte Teilmenge von X. Folglich enthält, für beliebiges n, die Überdeckung von $\Phi(M)$ durch die Familie der offenen Mengen $\bigcup_{x \in M} B_{1/n}(x)$ eine endliche Teilüberdeckung, d.h. es existieren $x_1, \ldots, x_{m_n} \in M$ mit [4]:

$$\bigcup_{i=1}^{m_n} B_{1/n}(x_i). \tag{3.8}$$

Definiere nun eine Abbildung $\Phi_n : M \to X$ durch

$$\Phi_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^{m_n} \alpha_i(x)\Phi(x_i)}{\sum_{i=1}^{m_n} \alpha_i(x)}, \qquad x \in M,$$

wobei

$$\alpha_i = \max\{\frac{1}{n} - \|\Phi(x) - \Phi(x_i)\|, 0\}, \qquad \forall i = 1, \ldots, m_n.$$

Die Abbildungen α_i sind stetig und, für alle $x \in M$, wegen (3.8), nicht alle gleich Null, d.h.

$$\sum_{i=1}^{m_n} \alpha_i(x) > 0 \qquad \forall x \in M.$$

Somit ist auch $\Phi_n : M \to X$ stetig. Trivialerweise ist $\dim\ (lin(\Phi_n(M))) \leq m_n$. Da $\Phi(M)$ beschränkt, ist auch $\Phi_n(m)$ beschränkt, und somit - als Teilmenge eines endlich-dimensionalen Vektorraums - relativ kompakt. Da Φ_n stetig, folgt, dass Φ_n kompakt.
Ausserdem ist für alle $x \in M$

$$\begin{aligned}
\|\Phi_n(x) - \Phi(x)\| &= \|\frac{\sum_{i=1}^{m_n} \alpha_i(x)(\Phi(x_i) - \Phi(x))}{\sum_{i=1}^{m_n} \alpha_i(x)} \\
&\leq \frac{\sum_{i=1}^{m_n} \alpha_i(x)\|\Phi(x_i) - \Phi(x)\|}{\sum_{i=1}^{m_n} \alpha_i(x)} \\
&\leq 1/n,
\end{aligned}$$

[4]Erinnerung: In einem vollständigen metrischen Raum (X, d) ist eine Menge M relativ kompakt genau dann, wenn M präkompakt, d.h. für alle $\epsilon > 0$, die Überdeckung der Menge M durch ϵ-Kugeln $M \subset \cup_{x \in M} B_\epsilon(x)$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h. $x_1, \ldots x_n \in M$ existieren so, dass $M \subset \cup_{i=1}^n B_\epsilon(x_i)$.

da $\alpha_i(x) \neq 0$ genau dann, wenn $\|\Phi(x_i) - \Phi(x)\| < 1/n$. $\square$

Weiter im Beweis von Satz 3.9:

2. Schritt: Da $\Phi : M \to M$ stetig und M kompakt, ist Φ kompakt. Nach dem Lemma kann Φ also durch endlich-dimensionale kompakte Operatoren Φ_n approximiert werden. Diese seien wie im Beweis des lemmas definiert. Für $n \in \mathbb{N}$ sei nun $M_n := \overline{co\{\Phi(x_1), \ldots, \Phi(x_{m_n})\}}$. Da M konvex und abgeschlossen, ist $M_n \subset M$. Da M_n in einem endlich-dimensionalen Teilraum von X liegt und ausserdem beschränkt ist, folgt, dass M_n konvex und kompakt ist. Nach dem Satz von Brouwer (vgl. Bemerkung 1.) nach dem Satz von Brouwer) besitzt die stetige Abbildung $\Phi_n : M_n \to M_n$ mindestens einen Fixpunkt x_n: $x_n = \Phi_n(x_n)$. Da $(x_n)_n \subset M$ und M kompakt, gibt es konvergente Teilfolge $x_{n_k} \to x \in M$. x ist der gesuchte Fixpunkt von Φ, denn

$$\begin{aligned}
\|x_{n_k} - \Phi(x)\| &\leq \|\Phi_{n_k}(x_{n_k}) - \Phi(x_{n_k})\| + \|\Phi(x_{n_k}) - \Phi(x)\| \\
&\leq \frac{1}{n_k} + \|\Phi(x_{n_k}) - \Phi(x)\| \\
&\to 0,
\end{aligned}$$

da Φ stetig. $\square$

Beispiel: Anwendung der Fixpunktmethode auf (RWP2)

Betrachten wir noch einmal das Problem:

$$(\textbf{RWP2}) \begin{cases} -\operatorname{div}\,(A(x,u)Du) = f & \text{auf } \Omega \\ \qquad u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

wobei $f \in H^{-1}(\Omega)$, $A : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N \times N}$ eine Caratheodory-Funktion, $A = (a_{ij})_{i,j}$ mit

* $a_{ij} \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$ für alle i, j
* $\xi^t A(x,u)\xi \geq \lambda|\xi|^2$ für alle $u \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^N$, für fast alle $x \in \Omega$

für ein $\lambda > 0$.
Wir haben die schwache Formulierung von (RWP2) in $H_0^1(\Omega)$ und die zugehörige Operatorgleichung $\mathcal{A}_2 u = f$ mit $\mathcal{A}_2 : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, $\mathcal{A}_2$ definiert durch

$$< \mathcal{A}_2 u, v >= \int_\Omega A(x,u)Du \cdot Dv \qquad \forall u, v \in H_0^1(\Omega),$$

bereits hergeleitet und gesehen, dass der Operator $\mathcal{A}_2$ zwar koerzitiv, aber i.a. nicht monoton ist.

Durch folgenden Trick kann das Problem (RWP2) in ein Fixpunktproblem umformuliert werden. Dazu wählen wir zunächst ein beliebiges, aber festes $w \in L^2(\Omega)$ und betrachten das Randwertproblem

$$(P(w)) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}\,(A(x,w)Du) = f & \text{auf } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}.$$

In seiner schwachen Formulierung lautet dieses: finde

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \text{ so, dass} \\ a(u,v) := \int_\Omega A(x,w)Du \cdot Dv\,dx =< f, v > \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}.$$

Die so definierte Bilinearform $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ ist offensichtlich beschränkt: $|a(u,v)| \le const\|u\|_{1,2}\|v\|_{1,2}$ und koerzitiv:

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \int_\Omega A(x,w)Du \cdot Du\,dx \\ &\ge \lambda \int_\Omega |Du|^2\,dx \\ &\ge c\lambda\|u\|_{1,2}^2 \qquad \text{(Poincaré'sche Ungl.)} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Mit dem Lemma von Lax-Milgram folgt daher die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ von (P(w)). Da $w \in L^2(\Omega)$ beliebig gewählt war, können wir daher folgende Abbildung definieren:

$$\begin{aligned} \Phi : \ & L^2(\Omega) \ \to L^2(\Omega) \\ & w \qquad \mapsto u = \text{ die eindeutige schwache Lösung von } (P(w)) \end{aligned}.$$

Beobachtung: eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ ist schwache Lösung von (RWP2) genau dann, wenn $u \in H_0^1\Omega)$ die eindeutige schwache Lösung von $(P(u))$, also genau dann, wenn $\Phi(u) = u$ ist, d.h. u ein Fixpunkt von Φ ist.

Damit haben wir es geschafft, (RWP2) äquivalent als Fixpunktproblem zu formulieren.

Dieses lösen wir nun mit Hilfe des Satzes von Schauder, Version 2. Wir wählen dazu $X = L^2(\Omega)$ und zeigen, dass die Abbildung Φ kompakt ist.

<u>1. Schritt</u>: die Bildmenge $\Phi(L^2(\Omega))$ ist relativ kompakt in $L^2(\Omega)$ (und damit ist auch für jede beschränkte Teilmenge $E \subset L^2(\Omega)$ die Menge $\Phi(E)$ relativ kompakt in $L^2(\Omega)$):
es sei wieder $w \in L^2(\Omega)$ beliebig, $u = \Phi(w)$. Wegen (3.9) gilt dann

$$c\lambda\|u\|_{1,2}^2 \le a(u,u) =< f, u >_{H^{-1},H_0^1} \le \|f\|_{H^{-1}}\|u\|_{1,2},$$

und somit

$$\|u\|_{1,2} \le \frac{1}{c\lambda}\|f\|_{H^{-1}}.$$

Die Konstante auf der rechten Seite ist unabhängig von w, und daher gilt also

$$\|\Phi(w)\|_{1,2} \le \frac{1}{c\lambda}\|f\|_{H^{-1}} \qquad \forall w \in L^2(\Omega). \tag{3.10}$$

Mit anderen Worten $\Phi(L^2(\Omega))$ ist eine beschränkte Teilmenge von $H_0^1(\Omega)$. Da $H_0^1(\Omega)$ kompakt in $L^2(\Omega)$ eingebettet ist (Satz von Rellich), folgt somit, dass $\Phi(L^2(\Omega))$ eine relativ kompakte Menge in $L^2(\Omega)$ ist.

2. Schritt: Φ ist stetig:
sei $(u_n)_n$ eine in $L^2(\Omega)$ konvergente Folge $u_n \to u$; wir müssen zeigen, dass $\Phi(u_n) \to \Phi(u)$ in $L^2(\Omega)$.

Zwischenbehauptung: Jede Teilfolge von $(\Phi(u_n))_n$ besitzt eine weitere Teilfolge, die stark in $L^2(\Omega)$ gegen $\Phi(u)$ konvergiert.

Bevor wir die Zwischenbehauptung beweisen, wollen wir zunächst zeigen, wieso dann folgt, dass die gesamte Folge $\Phi(u_n) \to \Phi(u)$ stark in $L^2(\Omega)$ konvergiert. Beweis durch Widerspruch: angenommen, $\Phi(u_n)$ konvergiert nicht in $L^2(\Omega)$ gegen $\Phi(u)$. Dann existiert $\epsilon > 0$ und eine Teilfolge $(\Phi(u_{n_k}))_k$ von $(\Phi(u_n))_n$ mit $n_k \to \infty$ für $k \to \infty$, so dass

$$\|\Phi(u_{n_k}) - \Phi(u)\|_{L^2} \geq \epsilon \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.11}$$

Nun folgt aber gerade aus der Zwischenbehauptung, dass $(\Phi(u_{n_k}))_k$ eine weitere Teilfolge besitzt, die stark in $L^2(\Omega)$ gegen $\Phi(u)$ konvergiert. Andererseits erfüllt die Teilfolge auch die Ungleichung (3.11). Dies ist offensichtlich ein Widerspruch.

Beweis der Zwischenbehauptung:
Da $(\Phi(u_n))_n$ in $H_0^1(\Omega)$ beschränkt ist und $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$, besitzt jede Teilfolge von $(\Phi(u_n))_n$ eine weitere Teilfolge, nennen wir sie $v_{n_k} = (\Phi(u_{n_k}))_n$, so, dass

* $v_{n_k} \to v$ stark in $L^2(\Omega)$ und fast überall auf Ω.

Da $(\Phi(u_n))_n$ in $H_0^1(\Omega)$ beschränkt und $H_0^1(\Omega)$ reflexiv, dürfen wir nach dem Satz von Eberlein-Šmulian annehmen, dass die Teilfolge so gewählt ist, dass $v_{n_k} \rightharpoonup \tilde{v}$ schwach in $H_0^1(\Omega)$. Es ist: $v = \tilde{v}$, denn für alle $\varphi \in L^2(\Omega)$ gilt einerseits

$$\int_\Omega v_{n_k}\varphi\,dx \to \int_\Omega v\varphi\,dx.$$

Andererseits kann jedes Element $\varphi \in L^2(\Omega)$ mit einem Element $j_\varphi \in H^{-1}(\Omega)$ identifiziert werden mit $< j_\varphi, v >_{H^{-1},H_0^1} = \int_\Omega \varphi v\,dx$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$. Somit folgt aus der schwachen Konvergenz in $H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}\int_\Omega v_{n_k}\varphi\,dx &= < j_\varphi, v_{n_k} >_{H^{-1},H_0^1}\\ &\to < j_\varphi, \tilde{v} >_{H^{-1},H_0^1}\\ &= \int_\Omega \varphi\tilde{v}\,dx.\end{aligned}$$

Es ist also $\int_\Omega v\varphi\,dx = \int_\Omega \varphi\tilde{v}\,dx$ für alle $\varphi \in L^2(\Omega)$, und somit folgt z.B. mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung, dass $v = \tilde{v}$.
Wir dürfen also annehmen, dass unsere Teilfolge so gewählt ist, dass

* $v_{n_k} \rightharpoonup v$ schwach in $H_0^1(\Omega)$,

und insbesondere erhalten wir damit, dass

* $v \in H_0^1(\Omega)$

Da $(\Phi(u_n))_n$ in $H_0^1(\Omega)$ beschränkt, ist insbesondere auch $(D_i\Phi(u_n))_n$ beschränkt in $L^2(\Omega)$, für alle $i = 1, \ldots, N$. Da $L^2(\Omega)$ reflexiv ist, dürfen wir wieder nach dem Satz von Eberlein-Šmulian annehmen, dass die Teilfolge so gewählt ist, dass auch

* $D_i v_{n_k} \rightharpoonup v_i$ schwach in $L^2(\Omega)$, für alle i.

Es ist $v_i = D_i v$ für alle i, denn, für beliebiges $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega v D_i\varphi\, dx &= \lim_{k\to\infty} \int_\Omega v_{n_k} D_i\varphi\, dx \\
&= -\lim_{k\to\infty} \int_\Omega D_i v_{n_k} \varphi\, dx \\
&= -\int_\Omega v_i \varphi\, dx.
\end{aligned}$$

Bemerken wir schliesslich noch, dass wir o.B.d.A. auch immer annehmen können, dass die Teilfolge $(u_{n_k})_k$ so gewählt ist, dass auch

* $u_{n_k} \to u$ fast überall in Ω.

Es folgt dann, dass, für beliebiges $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $i, j = 1, \ldots, N$,

$$a_{ij}(x, u_{n_k}) D_i\varphi \to a_{ij}(x, u) D_j\varphi \qquad \text{fast überall auf } \Omega$$

und da die Funktionenfolge auch dominiert in $L^2(\Omega)$ ist:

$$|a_{ij}(x, u_{n_k}) D_j\varphi| \le \|a_{ij}\|_{L^\infty} |D_i\varphi| \in L^2(\Omega),$$

folgt mit Lebesgue's dominierten Konvergenzsatz sogar

$$a_{ij}(x, u_{n_k}) D_i\varphi \to a_{ij}(x, u) D_j\varphi \qquad \text{stark in } L^2(\Omega).$$

Da $D_j v_{n_k} \rightharpoonup D_j v$ schwach in $L^2(\Omega)$, können wir deshalb in den Gleichungen

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^N \int_\Omega a_{ij}(x, u_{n_k}) D_j v_{n_k} \cdot D_i\varphi\, dx &= \int_\Omega A(x, u_{n_k}) D v_{n_k} \cdot D\varphi \\
&= < f, \varphi >
\end{aligned}$$

zum Limes übergehen (vgl. Bemerkung 8.) nach Def. 3.3) und erhalten so

$$\int_\Omega A(x, u) Dv D\varphi\, dx = < f, \varphi > \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Dies bedeutet, dass $v = \Phi(u)$, die eindeutige schwache Lösung von $(P(u))$.
Damit ist auch die Zwischenbehauptung bewiesen.

Wir haben damit gezeigt, dass die Abbildung Φ kompakt ist. Betrachten wir nun noch einmal die Abschätzung (3.10) und definieren $M := \{v \in L^2(\Omega);\ \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{c\lambda}\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}\}$. Offensichtlich ist M eine nicht-leere, konvexe, abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von $L^2(\Omega)$. Aus (3.10) folgt ausserdem, dass die Abbildung Φ die Teilmenge M in sich abbildet. Nach dem Satz von Schauder besitzt die Einschränkung der Abbildung Φ auf M:

$$\begin{array}{lll} \Phi_{|M}: & M \rightarrow & M \\ & v \mapsto & \Phi(v) \end{array}$$

also mindestens einen Fixpunkt und dieser ist eine schwache Lösung von (RWP2).

Ein Eindeutigkeitsresultat ist unter den allgemeinen Voraussetzungen, die wir an die Koeffizienten $A(x,u)$ gestellt haben, nicht zu erzielen.

□

Wir wollen uns nun Operatorgleichungen

$$\mathcal{A}u = f$$

mit monotonem Operator $\mathcal{A} : V \rightarrow V'$ zuwenden. Unsere Vorüberlegungen im Spezialfall $V = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = g$ eine monoton wachsende Funktion, legen nahe, dass neben der Koerzitivität auch eine gewisse Stetigkeitsbedingung an den Operator $\mathcal{A}$ erforderlich ist, damit dieser surjektiv (oder sogar bijektiv) ist.
Neben dem klassischen Stetigkeitsbegriff:
$\mathcal{A} : V \rightarrow V'$ stetig $\Leftrightarrow \forall (u_n)_n, u \subset V$ mit $u_n \rightarrow u$ in V folgt $\mathcal{A}u_n \rightarrow \mathcal{A}u$ in V'
ermöglicht der schwache Konvergenzbegriff die Einführung einer Vielzahl weiterer Stetigkeitsbegriffe:

Definition 3.7
Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein Banachraum, $\mathcal{A} : V \rightarrow V'$ ein Operator. Dann heisst $\mathcal{A}$

* *hemi-stetig*, falls die Funktion

$$t \in [0,1] \mapsto < \mathcal{A}(u+tv), w >_{V',V}$$

  stetig ist für alle $u, v, w \in V$.
* *demi-stetig*, wenn aus $u_n \rightarrow u$ stark in V folgt, dass $\mathcal{A}u_n \rightharpoonup \mathcal{A}u$ schwach in V'.
* *stark stetig*, falls aus $u_n \rightharpoonup u$ schwach in V folgt, dass $\mathcal{A}u_n \rightarrow \mathcal{A}u$ stark in V'.

Bemerkung:

1.) Offenbar gelten die folgenden Implikationen:

$\mathcal{A}$ stark stetig $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ stetig $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ demi-stetig $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ hemi-stetig.

Letztere Implikation folgt aus der Tatsache, dass für eine Folge $(f_n)_n$ in einem Dualraum $(X', \|\cdot\|_{X'})$ eines Banachraums $(X, \|\cdot\|_X)$ stets gilt:

$$f_n \rightharpoonup f \text{ in } X' \quad \Rightarrow \quad f_n \rightharpoonup_* f \text{ in } X'.$$

Dies widerum folgt aus der bekannten Tatsache, dass jeder Banachraum X mit Hilfe der kanonischen Abbildung stetig in seinen Bidualraum X'' eingebettet werden kann.

2.) Falls $\dim V < \infty$ (und somit auch $\dim V' < \infty$), dann sind bekanntlich der schwache und der starke Konvergenzbegriff äquivalent. Folglich fallen in diesem Fall die Begriffe der starken Stetigkeit, der Stetigkeit und der Demi-Stetigkeit zusammen.
Hemi-Stetigkeit bleibt jedoch auch im endlich-dimensionalen ein schwächerer Stetigkeitsbegriff.

Beispiel: $V = V' = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A} = f$, wobei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wie folgt definiert ist:

$$f((x_1, x_2)) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } f_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & , (x_1, x_2) = (0, 0) \\ \dfrac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4} & , \text{sonst} \end{cases}$$

Offensichtlich ist $\mathcal{A}$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ stetig. Das Stetigkeitsverhalten $\mathcal{A}$ ergibt sich daher aus dem Stetigkeitsverhalten der Funktion f_1 in $(0, 0)$.
Da

$$\begin{aligned} f_1(\frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}}) &= \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{1}{2} \\ &\not\to f_1((0, 0) \qquad \text{für } n \to \infty, \end{aligned}$$

ist $\mathcal{A}$ offensichtlich nicht stetig in $(0, 0)$.
$\mathcal{A}$ ist aber hemi-stetig in $u = (0, 0)$ (und somit auf ganz $\mathbb{R}^2$), da, für alle $(v_1, v_2) \neq (0, 0)$, $t \in]0, 1]$, gilt

$$\begin{aligned} f_1((0, 0) + t(v_1, v_2)) &= t^3 \frac{v_1 v_2^2}{t^2 v_1^2 + t^4 v_2^4} \\ &= t \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + t^2 v_2^4} \\ &\to 0 \qquad \text{wenn } t \downarrow 0. \end{aligned}$$

3.) Falls der Banachraum V reflexiv ist, dann gilt:

$\mathcal{A}$ ist stark stetig $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ ist kompakt.

Beweis: Klar: $\mathcal{A}$ stark stetig $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ stetig.
Wir müssen noch zeigen, dass Bildfolgen $(\mathcal{A}u_n)_n$ von beschränkten Folgen $(u_n)_n \subset V$ konvergente Teilfolgen in V' besitzen.
Sei daher $(u_n)_n$ eine beschränkte Folge in V. Da V reflexiv, enthält $(u_n)_n$ nach dem Satz von Eberlein-Šmulian eine schwach konvergente Teilfolge $u_{n_k} \rightharpoonup u$ in V. Da $\mathcal{A}$ stark stetig, konvergiert dann $\mathcal{A}u_{n_k} \to \mathcal{A}u$ stark in V', also enthält $(\mathcal{A}u_n)_n$ eine

stark konvergente Teilfolge. $\square$

Die umgekehrte Implikation gilt i.a. nicht.

Beispiel: Sei $V = V' = L^2(\Omega)$, $\Omega = (0,1)$, $g \in L^2(\Omega)$. Dann ist der Operator

$$\begin{array}{lll} \mathcal{A}: & L^2(\Omega) & \to L^2(\Omega) \\ & f & \mapsto \left(\int_\Omega f^2\,dx\right)\cdot g \end{array}$$

kompakt, aber nicht stark stetig. (Beweis als Übung)

Setzen wir zusätzlich voraus, dass der Operator $\mathcal{A}$ monoton ist, so ergeben sich weitere Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Stetigkeitsbegriffen.
Wir benötigen im folgenden

Lemma 3.2
Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ eine reflexiver Banachraum, $\mathcal{A}: V \to V'$ ein beschränkter, monotoner Operator. Dann gilt:

$\mathcal{A}$ ist demi-stetig $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ ist hemi-stetig.

Beweis:
Da die Demi-Stetigkeit stets die Hemi-Stetigkeit impliziert, brauchen wir nur die umgekehrte Implikation zu zeigen.
Sei dazu $u_n \to u$ eine stark konvergente Folge in V. Insbesondere ist dann $(u_n)_n$ beschränkt in V.
Da $\mathcal{A}$ beschränkt, ist dann auch $(\mathcal{A}u_n)_n$ beschränkt in V'.
Da V reflexiv, ist nach Satz 3.3 auch V' reflexiv. Nach dem Satz von Eberlein-Šmulian besitzt daher $(\mathcal{A}u_n)_n$ eine schwach konvergente Teilfolge.
Sei nun $(\mathcal{A}u_{n_k})_k$ eine beliebige schwach konvergente Teilfolge von $(\mathcal{A}u_n)_n$, $f \in V'$ sei der schwache Limes dieser Teilfolge.

Zwischenbehauptung: $f = \mathcal{A}u$ in V'.

Nehmen wir vorübergehend an, wir hätten die Zwischenbehauptung bereits gezeigt. Da $(\mathcal{A}u_{n_k})_k$ eine beliebige schwach konvergente Teilfolge von $(\mathcal{A}u_n)_n$ war, haben wir somit gezeigt, dass jede beliebige schwach konvergente Teilfolge von $(\mathcal{A}u_n)_n$ gegen ein und denselben Limes $\mathcal{A}u$ konvergiert. Aus Satz 3.6 folgt dann, dass die gesamte Folge $(\mathcal{A}u_n)_n$ schwach gegen $\mathcal{A}u$ in V' konvergiert.

Beweis der Zwischenbehauptung: Wir wenden die als „Minty's Trick" bekannte Monotoniemethode an.

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in V$. Da $u_{n_k} \to u$ stark in V, $\mathcal{A}u_{n_k} \rightharpoonup f$ schwach in V', folgt

$$\begin{aligned}
& \lambda < f, v >_{V',V} \\
= & \lim_{k\to\infty} \lambda < \mathcal{A}u_{n_k}, v >_{V',V} \\
= & \lim_{k\to\infty} < \mathcal{A}u_{n_k}, u_{n_k} - u + \lambda v >_{V',V} \\
= & \lim_{k\to\infty} \{< \mathcal{A}u_{n_k} - \mathcal{A}(u-\lambda v), u_{n_k} - (u - \lambda v) >_{V',V} + < \mathcal{A}(u-\lambda v), u_{n_k} - u + \lambda v >_{V',V}\} \\
\geq & \lim_{k\to\infty} < \mathcal{A}(u-\lambda v), u_{n_k} - u + \lambda v >_{V',V} \qquad \text{(weil } \mathcal{A} \text{ monoton)} \\
= & < \mathcal{A}(u-\lambda v), \lambda v >,
\end{aligned}$$

d.h.

$$\lambda < f, v >_{V',V} \quad \geq \quad \lambda < \mathcal{A}(u-\lambda v), v > \qquad \forall v \in V. \tag{3.12}$$

Sei nun zunächst $\lambda > 0$. Wir dividieren (3.12) durch λ und lassen dann $\lambda \downarrow 0$ gehen. Da $\mathcal{A}$ hemi-stetig, erhalten wir so im Limes die Ungleichung

$$< f, v >_{V',V} \quad \geq \quad < \mathcal{A}u, v >_{V',V} \qquad \forall v \in V.$$

Betrachten wir nun den Fall, dass $\lambda < 0$. Dividieren wir dann (3.12) durch λ und lassen anschliessend $\lambda \uparrow 0$ gehen, erhalten wir dieses Mal die Ungleichung

$$< f, v >_{V',V} \quad \geq \quad < \mathcal{A}u, v >_{V',V} \qquad \forall v \in V.$$

Folglich ist

$$< f, v >_{V',V} \quad = \quad < \mathcal{A}u, v >_{V',V} \qquad \forall v \in V$$

und daher

$$f = \mathcal{A}u \ \text{ in } V'.$$

□

Bemerkungen:

1.) Die Voraussetzung im Lemma 3.2, dass $\mathcal{A}$ beschränkt ist, ist nicht erforderlich. Man kann vielmehr zeigen, dass jeder monotone Operator $\mathcal{A} : V \to V'$, V beliebiger Banachraum, *lokal beschränkt* ist, d.h. für alle $u \in V$ ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass das Bild $\mathcal{A}(B_\epsilon(u))$ der Kugel $B_\epsilon(u) = \{v \in V;\ \|u - v\|_V \leq \epsilon\}$ in V' beschränkt ist (siehe z.B. M. Růžička, Nichtlineare Funktionalanalysis). Lokale Beschränktheit von $\mathcal{A}$ reicht aber aus, um obigen Beweis zu führen.

2.) Analog wie Lemma 3.2 kann auch folgendes Resultat bewiesen werden:

Lemma 3.3
Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein reflexiver Banachraum, $\mathcal{A} : V \to V'$ ein monotoner Operator. Dann gilt:

$$\mathcal{A} \text{ ist stark stetig} \Leftrightarrow \mathcal{A} \text{ ist kompakt.}$$

Wir kommen nun zum Hauptsatz für Operatorgleichungen mit nicht-linearem monotonen Operator:

Satz 3.11 (Satz von Minty-Browder, 1963)
Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein reflexiver separabler Banachraum, $\mathcal{A} : V \to V'$ ein Operator mit folgenden Eigenschaften:

i) $\mathcal{A}$ ist beschränkt,

ii) $\mathcal{A}$ ist hemi-stetig,

iii) $\mathcal{A}$ ist monoton,

iv) $\mathcal{A}$ ist koerzitiv.

Dann ist $\mathcal{A}$ surjektiv, d.h. für alle $f \in V'$ gibt es mindestens eine Lösung $u \in V$ der Operatorgleichung $\mathcal{A}u = f$.
Ist $\mathcal{A}$ ausserdem strikt monoton, so ist $\mathcal{A}$ sogar bijektiv, d.h. für alle $f \in V'$ gibt es genau eine Lösung $u \in V$ der Operatorgleichung $\mathcal{A}u = f$.

Bevor wir den Satz beweisen, betrachten wir zunächst eine **Anwendung des Satzes von Minty-Browder auf das Problem (RWP3):**

Wir haben gesehen, dass das Problem, eine schwache Lösung für (RWP3) zu finden darin besteht, eine Lösung u der Operatorgleichung $\mathcal{A}_3 u = f$ zu finden, wobei $\mathcal{A}_3 : V \to V'$, $V = W_0^{1,p}(\Omega)$, definiert ist durch

$$< \mathcal{A}_3 u, v >_{V',V} = \int_\Omega |Du|^{p-2} Du \cdot Dv \, dx \qquad \forall u, v \in V.$$

Der Banachraum $V = W_0^{1,p}(\Omega)$ ist reflexiv und separabel. Der Operator $\mathcal{A}_3$ erfüllt die folgenden Eigenschaften:

* $\mathcal{A}_3$ ist beschränkt:

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}_3 u\|_{V'} &= \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|_V \le 1}} | < \mathcal{A}_3 u, v >_{V',V} | \\
&= \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|_V \le 1}} | \int_\Omega |Du|^{p-2} Du \cdot Dv \, dx| \\
&\le \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|_V \le 1}} \int |Du|^{p-1} |Dv| \, dx \\
&\le \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|_V \le 1}} \left(\int_\Omega |Du|^p \, dx \right)^{1/p'} \underbrace{\left(\int_\Omega |Dv|^p \, dx \right)^{1/p}}_{\le 1} \\
&\le (\|u\|_V)^{p/p'}
\end{aligned}$$

für alle $u \in V$. Somit bildet $\mathcal{A}_3$ beschränkte Mengen in V in beschränkte Mengen in V' ab.

* $\mathcal{A}_3$ ist hemi-stetig:

  Seien $u, v, w \in V$, $(t_n)_n$ eine Folge in $[0,1]$ mit $t_n \to t_\infty$. Es ist klar, dass

  $$|D(u+t_n v)|^{p-2}D(u+t_n v) \to |D(u+t_\infty v)|^{p-2}D(u+t_\infty v) \qquad \text{f. ü. in } \Omega.$$

  Darüber hinaus ist

  $$\begin{aligned} |D(u+t_n v)|^{p-1} &\leq (|Du|+|Dv|)^{p-1} \qquad (\text{da } t_n \in [0,1]) \\ &\leq 2^{p-1}(|Du|^{p-1}+|Dv|^{p-1}). \end{aligned}$$

  Die letzte Abschätzung folgt aus der nützlichen Ungleichung

  $$\forall a, b \geq 0, s > 0: \qquad (a+b)^s \leq 2^s(a^s+b^s).$$

  (für $a = 0$ oder $b = 0$ ist die Ungleichung trivial; ebenso für $a = b$; o.B.d.A. $\frac{a}{b} < 1$; dann ist die Ungleichung äquivalent zu: $(\frac{a}{b}+1)^s \leq 2^s((\frac{a}{b})^s+1)$. Da $0 < \frac{a}{b} < 1$, ist aber $(\frac{a}{b}+1)^s < 2^s < 2^s(\frac{a}{b}+1)^s$ q.e.d.)

  Da $|Du|, |Dv| \in L^p(\Omega)$, sind $|Du|^{p-1}, |Dv|^{p-1} \in L^{p'}(\Omega)$. Nach Lebesgue's dominierten Konvergenzsatz konvergiert daher $|D(u+t_n v)|^{p-2}D(u+t_n v)$ stark in $L^{p'}(\Omega)^N$ gegen $|D(u+t_\infty v)|^{p-2}D(u+t_\infty v)$. Damit ist klar, dass

  $$\begin{aligned} < \mathcal{A}_3(u+t_n v), w >_{V',V} &= \int_\Omega |D(u+t_n v)|^{p-2}D(u+t_n v)\cdot Dw \\ &\to \int_\Omega |D(u+t_\infty v)|^{p-2}D(u+t_\infty v)\cdot Dw \\ &= < \mathcal{A}_3(u+t_\infty v), w >_{V',V} \end{aligned}$$

  was zu beweisen war.

* $\mathcal{A}_3$ ist strikt monoton (Übung)

* $\mathcal{A}_3$ ist koerzitiv (schon gesehen)

Also folgt nun mit dem Satz von Minty-Browder, dass für jedes $f \in V'$ die Operatorgleichung $\mathcal{A}_3 u = f$ eine eindeutige Lösung $u \in V$ besitzt.
Mit anderen Worten: das Randwertproblem (RWP3) besitzt für alle rechten Seiten $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ genau eine schwache Lösung $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Beweis (Satz von Minty-Browder):

Sei $f \in V'$.
Eindeutigkeit einer Lösung, falls $\mathcal{A}$ strikt monoton: angenommen $u_1, u_2 \in V$ sind Lösungen der Operator-Gleichung $\mathcal{A}u = f$ und $u_1 \neq u_2$. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &= < f-f, u_1-u_2 >_{V',V} \\ &= < \mathcal{A}u_1 - \mathcal{A}u_2, u_1-u_2 >_{V',V} \\ &> 0 \qquad (\text{weil } \mathcal{A} \text{ strikt monoton}). \end{aligned}$$

Widerspruch!

Existenz einer Lösung: Der Beweis der Existenz einer Lösung $u \in V$ der Operatorgleichung (P) $\mathcal{A}u = f$ besteht im wesentlichen aus drei Schritten.

1. Schritt: Approximation der Gleichung

Wir approximieren die Operatorgleichung durch Näherungsgleichungen (P_n) in geeigneten endlich-dimensionalen Teilräumen $V_n \subset V$. Die Existenz einer Lösung u_n von (P_n) zeigen wir mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Brouwer.

2. Schritt: A-priori-Abschätzung

Wir zeigen, dass die Lösungen u_n von (P_n) beschränkt sind. Dank der Reflexivität von V erhalten wir so mit dem Satz von Eberlein-Šmulian die Existenz einer schwach konvergenten Teilfolge.

3. Schritt: Grenzübergang und Minty's Trick

Mit Hilfe von Minty's Monotonie-Trick zeigen wir, dass der Grenzwert einer schwach konvergenten Teilfolge von Näherungslösungen die Operator-Gleichung (P) löst.

Die einzelnen Schritte im Detail:

1. Schritt:

Zur Konstruktion der Näherungsgleichungen verwenden wir das sog. *Galerkin-Verfahren.* [5] Dabei wird das Ausgangsproblem (P) $\mathcal{A}u = f$, das im unendlich-dimensionalen Raum V gestellt ist, durch Näherungsgleichungen (P_n) ersetzt, die in geeignet gewählten endlich-dimensionalen Teilräumen $V_n \subset V$ gestellt sind. Genauer:

Definition 3.8
Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein Banachraum.
1.) Eine Folge von endlich-dimensionalen Teilräumen $V_n \subset V$ heisst *Galerkin-Schema*, falls gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(v, V_n) = 0 \qquad \forall v \in V$$

(die Teilräume V_n „schöpfen“ den gesamten Raum V aus).

2.) Eine Folge $(v_n)_n$ von Elementen in V heisst (*Galerkin-*)*Basis*, wenn gilt:

i) $\forall n \in \mathbb{N}: \qquad v_1, \dots, v_n$ sind linear unabhängig

ii) $V = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n}, \quad$ wobei $V_n := \operatorname{lin}\{v_1, \dots, v_n\}$.

Wir benutzen

[5] Das Galerkin-Verfahren bildet die theoretische Grundlage für das in der Praxis vielfach verwendete numerische Finite-Elemente-Verfahren (FEM). Diesen Aspekt verfolgen wir hier aber nicht weiter.

Lemma 3.4
Jeder separable Banachraum $(V, \|\cdot\|_V)$ besitzt eine Basis $(v_n)_n$.
Für jede Basis $(v_n)_n$ bilden die Teilräume $(V_n)_n$ mit $V_n := \text{lin}\ \{v_1, \ldots, v_n\}$ ein Galerkin-Schema.

Beweis:
Da V separabel, existiert eine abzählbare, in V dicht liegende Menge von Elementen $(w_n)_n$ in V. Setze dann $v_1 := w_1$. Falls w_2 linear unabhängig von v_1, setze $v_2 := w_2$, sonst mache mit w_3 weiter, etc.
Da $(w_n)_n$ dicht in V ist, ist klar, dass auch $\bigcup_n V_n$ mit $V_n = \text{lin}\{v_1, \ldots, v_n\}$ dicht in V liegt. Da $(V_n)_n$ eine aufsteigende Folge von Teilräumen (d.h. $V_n \subset V_{n+1}$ für alle n), folgt somit, dass $\lim_{n\to\infty} \text{dist}\ (v, V_n) = 0$.

□

Sei nun also $(v_n)_n$ eine Basis von V, $(V_n)_n$ das zugehörige Galerkin-Schema.
Wir approximieren die Gleichung (P) durch die endlich-dimensionalen Probleme:

$$(P_n) \qquad \begin{cases} <\mathcal{A}u_n, \varphi>_{V',V} = <f, \varphi>_{V',V} & \forall \varphi \in V_n \\ u_n \in V_n \end{cases} \tag{3.13}$$

Da $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V_n ist, ist die Abbildung

$$\begin{aligned} C: \quad & \mathbb{R}^n && \to V_n \\ & (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) && \mapsto \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \end{aligned}$$

bijektiv und stetig, und obiges Problem ist offensichtlich äquivalent dazu, ein Element $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ zu finden so, dass

$$<\mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right), v_j>_{V',V} = <f, v_j>_{V',V} \qquad \forall j = 1, \ldots, n.$$

Dazu betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi: \quad & \mathbb{R}^n && \to \mathbb{R}^n \\ & (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) && \mapsto \begin{pmatrix} <\mathcal{A}(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i) - f, v_1>_{V',V} \\ \vdots \\ <\mathcal{A}(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i) - f, v_n>_{V',V} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir müssen zeigen, dass ein $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ existiert, so dass $\Phi(\alpha) = 0$.

Da $\mathcal{A}$ nach Voraussetzung und Lemma 3.2 **demi-stetig** ist, ist die Abbildung Φ stetig.
Ausserdem gilt

$$\begin{aligned}
\Phi(\alpha)\cdot\alpha &= \sum_{j=1}^{n} < \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\right) - f, \alpha_j v_j >_{V',V} \\
&= < \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\right) - f, \sum_{j=1}^{n}\alpha_j v_j >_{V',V} \\
&= < \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\right), \sum_{j=1}^{n}\alpha_j v_j >_{V',V} - < f, \sum_{j=1}^{n}\alpha_j v_j >_{V',V} \\
&\geq < \mathcal{A}(C\alpha), C\alpha >_{V',V} - \|f\|_{V'}\|C\alpha\|_V \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

für $\|C\alpha\|_V = \|\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j\|_V$ genügend gross, da $\mathcal{A}$ **koerzitiv** ist. In der Tat gilt nämlich wegen der Koerzivität von $\mathcal{A}$, dass für alle $S > 0$ ein $N = N(S) > 0$ existiert so, dass

$$\frac{< \mathcal{A}u, u >_{V',V}}{\|u\|_V} \geq S \qquad \forall u \in V \text{ mit } \|u\|_V \geq N,$$

d.h.

$$< \mathcal{A}u, u >_{V',V} - S\,\|u\|_V \geq 0 \qquad \forall u \in V \text{ mit } \|u\|_V \geq N.$$

Da durch

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto |\alpha|_C := \|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\|_V$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert wird, und alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ bekanntlich äquivalent sind, haben wir damit gezeigt, dass

$$\Phi(\alpha)\cdot\alpha \geq 0$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R}^n$ mit (euklidischer) Norm $|\alpha| \geq R$ für ein geeignetes $R > 0$. Die Existenz einer Nullstelle von Φ folgt dann aus folgendem

Lemma 3.5
Sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig mit der Eigenschaft, dass für ein $R > 0$ gilt:

$$\Phi(v)\cdot v \geq 0 \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n \text{ mit } |v| = R. \tag{3.14}$$

Dann besitzt Φ mindestens einen Fixpunkt $\alpha \in \overline{B_R(0)}$.

Beweis:
Angenommen, $\Phi(v) \neq 0$ für alle $v \in \overline{B_R(0)}$. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned}
\Psi :\ \overline{B_R(0)} &\to \overline{B_R(0)} \\
v &\mapsto -R\frac{\Phi(v)}{|\Phi(v)|}
\end{aligned}$$

wohldefiniert und stetig. Nach dem Fixpunktsatz von Brouwer besitzt Ψ daher mindestens einen Fixpunkt $\alpha \in \overline{B_R(0)}$. Es ist dann $|\alpha| = |\Psi(\alpha)| = R$, und deshalb

$$\begin{aligned} 0 &< R^2 \\ &= |\alpha|^2 \\ &= \Psi(\alpha) \cdot \alpha \\ &= -R\frac{\Phi(\alpha)}{|\Phi(\alpha)|} \cdot \alpha \\ &\leq 0 \qquad\qquad \text{(wegen (3.14)} \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch. □

<u>2. Schritt:</u> Wählen wir $\varphi = u_n \in V_n$ als Testfunktion in (3.13), erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} < \mathcal{A}u_n, u_n >_{V',V} &= < f, u_n >_{V',V} \\ &\leq \|f\|_{V'}\|u_n\|_V, \end{aligned}$$

d.h. für alle n mit $\|u_n\|_V \neq 0$ ist

$$\frac{< \mathcal{A}u_n, u_n >}{\|u_n\|_V} \leq \|f\|_{V'}.$$

Da $\mathcal{A}$ **koerzitiv** ist, folgt deshalb, dass die Folge der Näherungslösungen $(u_n)_n$ beschränkt in V ist. Da $\mathcal{A}$ **beschränkt**, ist somit auch $(\mathcal{A}u_n)_n$ beschränkt in V'. Da V, V' reflexiv sind, folgt mit dem Satz von Eberlein-Šmulian die Existenz einer Teilfolge $(u_{n_k})_k$, so dass $(u_{n_k})_k$ schwach in V gegen ein Element u konvergiert und $(\mathcal{A}u_{n_k})_k$ schwach in V' gegen ein $\chi \in V'$ konvergiert:

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \text{ in } V,$$

$$\mathcal{A}u_{n_k} \rightharpoonup \chi \text{ in } V'.$$

<u>3. Schritt:</u> Gehen wir in den Gleichungen

$$< \mathcal{A}u_{n_k}, \varphi >_{V',V} = < f, \varphi >_{V',V} \qquad \forall \varphi \in V_m, \forall m \leq n_k$$

zum Limes $k \to \infty$ über, erhalten wir

$$< \chi, \varphi >_{V',V} = < f, \varphi >_{V',V}$$

für alle $\varphi \in V_m$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Da $V = \overline{\bigcup_n V_n}$, gilt die Gleichung für alle $\varphi \in V$ und somit $\chi = f$.
Aus den Näherungsgleichungen erhalten wir ausserdem, dass

$$< \mathcal{A}u_{n_k}, u_{n_k} >_{V',V} = < f, u_{n_k} >_{V',V} \to < f, u >_{V',V}$$

für $k \to \infty$, und somit

$$< \mathcal{A}u_{n_k}, u_{n_k} - u >_{V',V} = < f, u_{n_k} >_{V',V} - < \mathcal{A}u_{n_k}, u >_{V',V} \to 0$$

für $k \to \infty$.
Mit Hilfe von Minty's Monotonie-Trick können wir nun zeigen, dass $f = \mathcal{A}u$:
Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi \in V$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\lambda < f, \varphi >_{V',V} &= \lim_{k\to\infty} < \mathcal{A}u_{n_k}, \lambda\varphi >_{V',V} \\
&= \lim_{k\to\infty} < \mathcal{A}u_{n_k}, u_{n_k} - u + \lambda\varphi >_{V',V} \\
&\geq \lim_{k\to\infty} < \mathcal{A}(u - \lambda\varphi), u_{n_k} - u + \lambda\varphi >_{V',V} \\
&= \lambda < \mathcal{A}(u - \lambda\varphi), \varphi >_{V',V} .
\end{aligned}$$

Dividieren der Ungleichung durch $\lambda > 0$ (resp. $\lambda < 0$) und Übergang zum Limes mit $\lambda \downarrow 0$ (resp. $\lambda \uparrow 0$) führt, da $\mathcal{A}$ **hemi-stetig**, wie im Beweis von Lemma 3.2 zur Gleichung $< \mathcal{A}u, \varphi >_{V',V} = < f, \varphi >_{V',V}$ für alle $\varphi \in V$, und somit $\mathcal{A}u = f$ in V'.
□

Wir haben gesehen, dass mit Hilfe des Satzes von Minty-Browder Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung des Randwertproblems (RWP3) für den monotonen p-Laplace-Operator gezeigt werden kann. Bereits „kleine" Störungen des p-Laplace-Operators (etwa durch einen nicht-monotonen Reaktionsterm 0. Ordnung $\Phi(x, u)$ oder einen Konvektionsterm vom Typ $\operatorname{div} F(x, u)$) aber können die Monotonie-Eigenschaft des Operators zerstören.
Tatsächlich kann der Satz von Minty-Browder aber in verschiedenen Richtungen erweitert und so auch allgemeinere Operatoren betrachtet werden. Ein Beispiel dafür ist der folgende

Satz 3.12 (Lions, 1965)
Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein reflexiver separabler Banachraum, $\mathcal{A} : V \to V'$ ein Operator mit folgenden Eigenschaften:

i) $\mathcal{A}$ ist beschränkt,

ii) $\mathcal{A}$ hat die (M)-Eigenschaft:

falls $u_n \rightharpoonup u$ in $V, \mathcal{A}u_n \rightharpoonup \chi$ in V' und $\limsup_n < \mathcal{A}u_n, u_n >_{V',V} \leq < \chi, u >_{V',V}$

dann $\mathcal{A}u = \chi$.

iii) $\mathcal{A}$ ist koerzitiv.

Dann ist $\mathcal{A}$ surjektiv, d.h. für alle $f \in V'$ gibt es mindestens eine Lösung $u \in V$ der Operatorgleichung $\mathcal{A}u = f$.

Beweis:
Wir betrachten noch einmal den Beweis des Satzes von Minty-Browder. Im 1. Schritt wird nur die Demi-Stetigkeit des Operators $\mathcal{A}$ benutzt. Ein beschränkter Operator in einem reflexiven separablen Banachraum, der die (M)-Eigenschaft besitzt, ist aber offensichtlich demi-stetig.
Im 2. Schritt floss nur die Koerzivität und Beschränkheit des Operators $\mathcal{A}$ ein. Dieser kann somit identisch übernommen werden.
Nur im 3. Schritt wurde die Monotonie (zusammen mit der Hemi-Stetigkeit) des

Operators $\mathcal{A}$ ausgenutzt, um den schwachen Limes $f = \chi$ der Folge $(\mathcal{A}u_{n_k})_k$ als das Element $\mathcal{A}u$ zu identifizieren.
Da wir aber gezeigt haben, dass

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \text{ in } V,\ \mathcal{A}u_{n_k} \rightharpoonup f \text{ in } V'$$

und

$$< \mathcal{A}u_{n_k}, u_{n_k} >_{V',V} = < f, u_{n_k} >_{V',V} \rightarrow < f, u >_{V',V}$$

folgt direkt aus der (M)-Eigenschaft, dass $\mathcal{A}u = f$. □

Bemerkungen:

1.) Ist ein Operator $\mathcal{A} : V \to V'$ (V reflexiv und separabel) beschränkt, monoton und hemi-stetig, so erfüllt $\mathcal{A}$ die (M)-Eigenschaft (Beweis als Übung).
Umgekehrt sind beschränkte Operatoren, die die (M)-Eigenschaft besitzen, zwar hemi-stetig (da ja sogar demi-stetig), aber i.a. nicht monoton.
Triviales Beispiel: $V = V' = \mathbb{R}$; dann ist $\mathcal{A} = f$ für jede beliebige stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt und erfüllt die (M)-Eigenschaft, aber nur für monoton wachsende Funktionen f ist $\mathcal{A}$ monoton.

2.) Ist $\mathcal{A} : V \to V'$ (V reflexiv und separabel) beschränkt, monoton und hemi-stetig und $\mathcal{B} : V \to V'$ stark stetig, dann erfüllt der Operator $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ die (M)-Eigenschaft (Beweis als Übung).

3.) Die Eindeutigkeit einer Lösung der Operatorgleichung $\mathcal{A}u = f$ kann unter den allgemeineren Voraussetzungen des Satzes von Lions i.a. nicht gezeigt werden.

Mit Hilfe des Satzes von Lions (und der Bemerkung 2.) oben) kann nun beispielsweise die Existenz einer schwachen Lösung $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ des Randwertproblems für den p-Laplace-Operator mit Störung 1. Ordnung:

$$\begin{cases} -\Delta_p(u) - \text{ div } \Phi(u) = f & \text{auf } \Omega \\ \qquad\qquad u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

gezeigt werden unter der Voraussetzung, dass $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ stetig ist und der folgenden Wachstumsbedingung genügt:

$$\exists C > 0 : \qquad |\Phi(r)|^{p'} \leq C|r|^p \qquad \forall r \in \mathbb{R}$$

(Beweis in der Übung).

Noch ein paar Bemerkungen...

Die (M)-Eigenschaft ist sehr allgemein und kann für eine Vielzahl von Operatoren nachgewiesen werden.
Sie hat jedoch auch einen entscheidenen Nachteil: die Klasse der Operatoren, die die (M)-Eigenschaft besitzen ist nicht stabil unter der Summenbildung von Operatoren - ganz im Gegensatz zur Eigenschaft der Monotonie: sind die Operatoren

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B} : V \to V'$ monoton, so ist auch die Summe der beiden Operatoren $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ [6] monoton. Dagegen erfüllt die Summe $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ zweier Operatoren, die die (M)-Eigenschaft besitzen, im allgemeinen nicht die (M)-Eigenschaft.

Einen gewissen Ausweg aus diesem Dilemma bietet die Einführung einer weiteren Monotonieeigenschaft, die „zwischen" der Monotonie und der (M)-Bedingung angesiedelt ist:

Definition 3.9
Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein reflexiver Banachraum. Ein Operator $\mathcal{A} : V \to V'$ heisst *pseudo-monoton*, wenn gilt:

falls

$$u_n \rightharpoonup u \text{ schwach in } V \text{ und } \limsup_{n\to\infty} < \mathcal{A}u_n, u_n - u >_{V',V} \leq 0,$$

dann folgt

$$\liminf_{n\to\infty} < \mathcal{A}u_n, u_n - v >_{V',V} \geq < \mathcal{A}u, u - v >_{V',V} \qquad \text{für alle } v \in V.$$

Lemma 3.6
Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ reflexiver Banachraum, $\mathcal{A}, \mathcal{B} : V \to V'$ Operatoren. Dann gilt:

i) $\mathcal{A}$ monoton und hemi-stetig $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ pseudo-monoton $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ erfüllt die (M)-Bedingung

ii) $\mathcal{A}$ stark stetig $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ pseudo-monoton

iii) Falls $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ pseudo-monoton sind, dann ist auch die Summe der beiden Operatoren $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ pseudo-monoton.

Die Rückrichtung der Implikationen in i) und ii) gilt i.a. nicht.

Beweis:
ii) ist evident, denn aus $u_n \rightharpoonup u$ schwach in V folgt $\mathcal{A}u_n \to \mathcal{A}u$ stark in V', falls $\mathcal{A}$ stark stetig, und dann gilt ja sogar

$$\lim_{n\to\infty} < \mathcal{A}u_n, u_n - v >_{V',V} = < \mathcal{A}u, u - v >_{V',V}$$

für alle $v \in V$.

i) 1. Implikation: Sei $\mathcal{A}$ monoton und hemi-stetig. Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{A}$ pseudo-monoton ist. Sei dazu $u_n \rightharpoonup u$ eine schwach konvergente Folge in V mit

$$\limsup_{n\to\infty} < \mathcal{A}u_n, u_n - u >_{V',V} \leq 0. \tag{3.15}$$

[6] die Summe zweier Operatoren $\mathcal{A}, \mathcal{B} : V \to V'$ ist dabei punktweise definiert als $(\mathcal{A}+\mathcal{B})(u) = \mathcal{A}(u) + \mathcal{B}(u)$ für alle $u \in V$

Da $\mathcal{A}$ monoton ist, gilt

$$\begin{aligned} < \mathcal{A}u_n, u_n - u >_{V',V} &= < \mathcal{A}u_n - \mathcal{A}u, u_n - u >_{V',V} + < \mathcal{A}u, u_n - u >_{V',V} \\ &\geq < \mathcal{A}u, u_n - u >_{V',V} . \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\liminf_{n\to\infty} < \mathcal{A}u_n, u_n - u >_{V',V} \;\geq\; \liminf_{n\to\infty} < \mathcal{A}u, u_n - u >_{V',V} = 0.$$

Wegen (3.15) folgt daher

$$\lim_{n\to\infty} < \mathcal{A}u_n, u_n - u >_{V',V} = 0. \tag{3.16}$$

Wegen der Monotonie von $\mathcal{A}$ gilt aber auch, für alle $v \in V$, $\lambda > 0$,

$$< \mathcal{A}u_n - \mathcal{A}(u + \lambda(v-u)), u_n - (u + \lambda(v-u)) >_{V',V} \geq 0$$

Umformung dieser Ungleichung und Übergang zum Limes $\lambda \downarrow 0$ führt zu

$$\lambda \liminf_{n\to\infty} < \mathcal{A}u_n, u - v >_{V',V} \geq \lambda < \mathcal{A}(u + \lambda(u-v)), u - v >_{V',V} .$$

Nach Division durch λ können wir wegen der Hemi-Stetigkeit von $\mathcal{A}$ zum Limes übergehen und erhalten

$$\liminf_{n\to\infty} < \mathcal{A}u_n, u - v >_{V',V} \geq < \mathcal{A}u, u - v >_{V',V} .$$

Benutzen wir an dieser Stelle ein weiteres Mal (3.16) folgt

$$\liminf_{n\to\infty} < \mathcal{A}u_n, u_n - v >_{V',V} \geq < \mathcal{A}u, u - v >_{V',V}$$

für alle $v \in V$, und damit ist gezeigt, dass $\mathcal{A}$ pseudo-monoton ist.

2. Implikation: Sei $u_n \rightharpoonup u$ schwach in V, $\mathcal{A}u_n \rightharpoonup \chi$ schwach in V' mit $\limsup_{n\to\infty} < \mathcal{A}u_n, u_n - u >_{V',V} \leq 0$. Wegen der Pseudo-Monotonie von $\mathcal{A}$ folgt dann für alle $v \in V$:

$$\begin{aligned} < \mathcal{A}u, u - v >_{V',V} &\leq \liminf_{n\to\infty} < \mathcal{A}u_n, u_n - v >_{V',V} \\ &= \liminf_{n\to\infty} \big(< \mathcal{A}u_n, u_n - u >_{V',V} + < \mathcal{A}u_n, u - v >_{V',V} \big) \\ &\leq < \chi, u - v >_{V',V} . \end{aligned}$$

Wählen wir in dieser Ungleichung $v = u \pm \varphi$, $\varphi \in V$, erhalten wir

$$\pm < \mathcal{A}u, \varphi >_{V',V} \geq \pm < \chi, \varphi >_{V',V} .$$

Es folgt, dass $< \mathcal{A}u, \varphi >_{V',V} = < \chi, \varphi >_{V',V}$ für alle $\varphi \in V$ und somit $\mathcal{A}u = \chi$.

Die folgenden Beispiele zeigen, dass die Rückimplikationen nicht gelten:
1.) Sei $V = H$ ein separabler Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ und zugehöriger Norm $|\cdot|$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \; H &\to H \\ u &\mapsto -u. \end{aligned}$$

(Wir identifizieren hier und im folgenden H und H' mittels der Abbildung von Riesz.)
Dann erfüllt $\mathcal{A}$ offensichtlich die (M)-Bedingung, ist aber nicht pseudo-monoton. Dies sieht man wie folgt: sei $(e_n)_n$ eine Orthonormalbasis von H. Dann gilt für alle

$v \in H$, dass $v = \sum_{n=1}^{\infty}(v, e_n)e_n$ (wobei die Reihe in H konvergiert) und nach der Parseval'schen Gleichung ist

$$|v|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(v, e_n)|^2.$$

Die Konvergenz der Reihe impliziert aber, dass $|(v, e_n)| \to 0$ für $n \to \infty$, für alle $v \in V$, und somit folgt, dass $e_n \rightharpoonup 0$ schwach in H. Ausserdem gilt, dass

$$(\mathcal{A}e_n, e_n - 0) = (-e_n, e_n) = -1 \leq 0$$

für alle n und daher $\limsup_{n\to\infty}(\mathcal{A}e_n, e_n - 0) \leq 0$. Es gilt jedoch

$$\liminf_{n\to\infty}(\mathcal{A}e_n, e_n - v) = -1 \not\geq 0 = (\mathcal{A}0, 0 - v),$$

und deshalb ist $\mathcal{A}$ nicht pseudo-monoton.

2.)Sei $V = V' = \mathbb{R}$. Dann ist für jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der zugehörige Operator $\mathcal{A} = f$ stark stetig und somit nach ii) pseudo-monoton. Aber $\mathcal{A}$ ist natürlich nur dann monoton, wenn f monoton wachsend auf $\mathbb{R}$.

iii) Sei $u_n \rightharpoonup u$ eine in V schwach konvergente Folge mit

$$\limsup_{n\to\infty} < (\mathcal{A} + \mathcal{B})u_n, u_n - u >_{V',V} \leq 0. \tag{3.17}$$

Dann folgt aber
<u>Zwischenbehauptung:</u>

$$\limsup_{n\to\infty} < \mathcal{A}u_n, u_n - u >_{V',V} \leq 0 \ \underline{\text{und}}\ \limsup_{n\to\infty} < \mathcal{B}u_n, u_n - u >_{V',V} \leq 0.$$

Hieraus folgt dann aber wegen der Pseudo-Monotonie von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, dass

$$\liminf_{n\to\infty} < \mathcal{A}u_n, u_n - v >_{V',V} \geq < \mathcal{A}u, u - v >_{V',V}$$

und

$$\liminf_{n\to\infty} < \mathcal{B}u_n, u_n - u >_{V',V} \geq < \mathcal{B}u, u - v >_{V',V}$$

für alle $v \in V$.
Addition der beiden letzten Ungleichungen liefert aber die gewünschte Ungleichung

$$\liminf_{n\to\infty} < (\mathcal{A} + \mathcal{B})u_n, u_n - u >_{V',V} \geq < (\mathcal{A} + \mathcal{B})u, u - v >_{V',V}$$

für alle $v \in V$.
Es bleibt die Zwischenbehauptung zu zeigen. Angenommen, diese gilt nicht. O.B.d.A. können wir dann annehmen, dass eine Folge $(u_{n_k})_k$ und ein $\alpha > 0$ (evtl. $\alpha = +\infty$) existieren, so dass

$$\lim_{k\to\infty} < \mathcal{A}u_{n_k}, u_{n_k} - u >_{V'V} = \alpha.$$

Wegen (3.17) muss dann aber gelten

$$\limsup_{k\to\infty} < \mathcal{B}u_{n_k}, u_{n_k} - u >_{V',V} \quad \leq \quad -\alpha < 0.$$

Da $\mathcal{B}$ pseudo-monoton, folgt dann aber

$$0 \ = < \mathcal{B}u, u - u >_{V',V} \leq \liminf_{k\to\infty} < \mathcal{B}u_{n_k}, u_{n_k} - u >_{V',V} .$$

Da $\liminf \leq \limsup$, erhalten wir so die Ungleichung $0 < 0$ und somit den Widerspruch. $\square$