Technische Universität Berlin SoSe 2010
Institut für Mathematik http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS10/LinA1/
Prof. Dr. J. Liesen, O. Sète Stand: 5. Mai 2010

Lineare Algebra I
3. Hausaufgabe

Abgabe: 12.05.2010 **vor** der Vorlesung

---

1. Aufgabe (5 Punkte)

Seien $(G, \oplus)$ und $(H, \odot)$ zwei Gruppen und $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Das neutrale Element von G sei e_G, das neutrale Element von H sei e_H. Zeigen Sie:

(i) Es gilt $\varphi(e_G) = e_H$.

(ii) Für alle $g \in G$ ist $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$.

(iii) Ist $U \subseteq G$ eine Untergruppe, so ist $\varphi(U)$ eine Untergruppe von H. Ist zusätzlich G kommutativ, so ist auch $\varphi(U)$ kommutativ (selbst wenn H nicht kommutativ ist).

(iv) Ist $V \subseteq H$ eine Untergruppe, so ist $\varphi^{-1}(V)$ eine Untergruppe von G.

2. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $(R, +, *)$ ein Ring mit 1. Wir definieren

$$R^\times := \{r \in R \,|\, r \text{ ist bzgl. } * \text{ invertierbar}\}\,.$$

(i) Untersuchen Sie, ob $(R^\times, *)$ eine Gruppe ist.

(ii) Bestimmen Sie die Mengen $\mathbb{Z}^\times$, $K^\times$ und $K[t]^\times$, wobei K ein Körper und $K[t]$ der Polynomring über K ist.

3. Aufgabe (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass in einem Körper

$$1 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + 1 + 1 + 1 = 0$$

gilt.

4. Aufgabe (7 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Dann ist $n\mathbb{Z} = \{nk | k \in \mathbb{Z}\}$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$, und durch $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in n\mathbb{Z}$ wird eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ definiert. Die Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$ besitzen die Gestalt $[a] = \{a + nk | k \in \mathbb{Z}\}$. Von diesen gibt es genau n verschiedene. Die Menge der Äquivalenzklassen wird mit $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ bezeichnet, also

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} := \{[0], [1], \ldots, [n-1]\}\,.$$

Durch

$$\begin{aligned} \oplus &: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad ([a],[b]) \mapsto [a] \oplus [b] = [a+b], \\ \odot &: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad ([a],[b]) \mapsto [a] \odot [b] = [a \cdot b], \end{aligned}$$

werden auf $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ eine Addition und eine Multiplikation erklärt (dabei sind $+$ und $\cdot$ die Addition und Multilpikation aus $\mathbb{Z}$). In der Übung wird gezeigt, dass $\oplus$ wohldefiniert ist und $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \oplus)$ eine abelsche Gruppe ist.

(i) Zeigen Sie, dass auch $\odot$ wohldefiniert ist, und dass $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ ein kommutativer Ring mit 1 ist.
Hinweis: Für die Wohldefiniertheit von $\odot$ ist zu zeigen, dass $[ab] = [a'b']$ aus $[a] = [a']$ und $[b] = [b']$ folgt.

(ii) Zeigen Sie: $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ ist genau dann ein Körper, wenn n eine Primzahl ist.

Das griechische Alphabet

Buchstabe	Name	Buchstabe	Name	Buchstabe	Name
A, α	Alpha	I, ι	Jota	P, ρ oder ϱ	Rho
B, β	Beta	K, κ	Kappa	Σ, σ (ς am Wortende)	Sigma
Γ, γ	Gamma	Λ, λ	Lambda	T, τ	Tau
Δ, δ	Delta	M, μ	My	Y, υ	Ypsilon
E, ε oder ϵ	Epsilon	N, ν	Ny	Φ, ϕ oder φ	Phi
Z, ζ	Zeta	Ξ, ξ	Xi	X, χ	Chi
H, η	Eta	O, o	Omikron	Ψ, ψ	Psi
Θ, θ oder ϑ	Theta	Π, π	Pi	Ω, ω	Omega

Gesamtpunktzahl: 20