Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Liesen, O. Sète

SoSe 2010
http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS10/LinA1/
Stand: 30. Juni 2010

Lineare Algebra I
11. Hausaufgabe

Abgabe: 07.07.2010 **vor** der Vorlesung

---

1. Aufgabe (6 Punkte)

(i) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass $\{[1+\alpha, 2]^T, [1, 2+\alpha]^T\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^{2,1}$ ist.

(ii) Sei $V = C([-1,1], \mathbb{R}) = \{f : [-1,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$. Dann ist V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum (siehe Analysis 1). Seien $f, g \in V$ mit $f(x) = x^2$ und $g(x) = x\,|x|$. Untersuchen Sie, ob f und g linear unabhängig sind.

(iii) Seien K ein Körper und $a_1, \ldots, a_n \in K^{n,1}$. Zeigen Sie, dass $a_1, \ldots, a_n$ genau dann linear unabhängig sind, wenn $\det([a_1, \ldots, a_n]) \neq 0$ ist.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $V = \mathbb{Q}[t]_{\leq 5} = \{p \in \mathbb{Q}[t] \mid \deg(p) \leq 5\}$. Seien $p_1 = t^5 + t^4$, $p_2 = t^5 - 7t^3$, $p_3 = t^5 - 1$, $p_4 = t^5 + 3t \in V$. Zeigen Sie, dass p_1, p_2, p_3, p_4 linear unabängig sind und ergänzen Sie $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ zu einer Basis von V.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Sei V ein K-Vektorraum. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Sind $v_1, \ldots, v_n \in V$, $A \in K^{n,m}$ und $B \in K^{m,s}$, so gilt

$$((v_1, \ldots, v_n)A)B = (v_1, \ldots, v_n)(AB).$$

(ii) Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ linear unabhängig, $A \in K^{n,m}$ und $(w_1, \ldots, w_m) = (v_1, \ldots, v_n)A$. Dann sind $w_1, \ldots, w_m$ linear unabhängig genau dann, wenn $\operatorname{Rang}(A) = m$.

4. Aufgabe (6 Punkte)

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, sowie U, W Unterräume von V mit

$$V = U + W := \{u + w \mid u \in U, w \in W\}.$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $V = U \oplus W$, d.h. $V = U + W$ und $U \cap W = \{0\}$.

(ii) Zu jedem $v \in V$ gibt es eindeutig bestimmte $u \in U$ und $w \in W$ mit $v = u + w$.

(iii) Ist $u \in U \backslash \{0\}$ und $w \in W \backslash \{0\}$, so sind u und w linear unabhängig.

Zusatzaufgabe (4 Punkte)

Sei K' ein Teilkörper des Körpers K. Der K'-Vektorraum K habe endliche Dimension $k = \dim_{K'}(K) < \infty$. Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Schränkt man die Skalarmultiplikation von K auf K' ein, so wird V auch zu einem K'-Vektorraum. Zeigen Sie $\dim_{K'}(V) = k \dim_K(V)$.

Gesamtpunktzahl: 20