TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2010
Institut für Mathematik **Abgabe**
Prof. Dr. M. Scheutzow / A. Drewitz 21.04.2010

1. Übung
Maß- und Integrationstheorie

1. Aufgabe

Es sei $\mathcal{A}$ eine Familie von Mengen. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) Für alle $A, B \in \mathcal{A}$ gilt: $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$, $A \triangle B \in \mathcal{A}$.

(b) Für alle $A, B \in \mathcal{A}$ gilt: $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$, $A \backslash B \in \mathcal{A}$.

(5 Punkte)

2. Aufgabe

Vervollständigen Sie den Beweis der Behauptung 2.4 indem Sie Folgendes zeigen: Sind die Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^2$ elementar (d.h. jeweils als endliche Vereinigung paarweise disjunkter achsenparalleler Rechtecke darstellbar, vgl. Definition 2.3), dann sind auch die Mengen $A\backslash B$ und $A \triangle B$ elementar.

(5 Punkte)

3. Aufgabe

(a) Bestimmen Sie den Limes superior und den Limes inferior der mittels $A_n = B$ für ungerade n und $A_n = C$ für gerade n definierten Mengenfolge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Es sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen einer nichtleeren Menge X. Zeigen Sie

- $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) = \mathbb{1}_{\liminf_{n\to\infty} A_n}(x)$ für alle $x \in X$,
- $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) = \mathbb{1}_{\limsup_{n\to\infty} A_n}(x)$ für alle $x \in X$;

(5 Punkte)

4. Aufgabe

Zeigen Sie, dass $\hat{m}$ aus Definition 2.6 wohldefiniert ist (cf. Bemerkung 2.7.1).

(5 Punkte)

Gesamt: 20 Punkte