TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2010
Institut für Mathematik **Abgabe**
Prof. Dr. M. Scheutzow / A. Drewitz 23.06.2010

10. Übung
Maß- und Integrationstheorie

1. Aufgabe

Es sei $\mathfrak{M}$ die Menge aller (nichtnegativen) Maße auf dem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$.

(a) Zeigen Sie: Die für $\mu, \nu \in \mathfrak{M}$ durch $\mu \ll \nu$ und $\nu \ll \mu$ definierte Relation $\mu \sim \nu$ ist eine Äquivalenzrelation.

(b) Für endliche Maße μ und ν gelte $\nu \ll \mu$. Geben Sie eine hinreichende und notwendige Bedingung an die Dichte $\frac{d\nu}{d\mu}$, sodass $\mu \ll \nu$, also $\mu \sim \nu$ gilt. Bestimmen Sie $\frac{d\mu}{d\nu}$.

(5 Punkte)

2. Aufgabe

Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, wobei die σ-Algebra $\mathcal{A}$ die Einpunktmengen enthält, sowie μ und ν diskrete Maße auf $\mathcal{A}$.

(a) Sind μ und ν σ-endlich?

(b) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für $\nu \ll \mu$ an.

(c) Berechnen Sie im Falle $\nu \ll \mu$ alle μ-Dichten von ν.

Hinweis: Das Maß μ heißt *diskret*, wenn es abzählbar viele $\omega_i \in \Omega$ und $p_i \in [0, \infty)$ gibt, sodass

$$\mu = \sum_i p_i \delta_{\omega_i}.$$

(5 Punkte)

3. Aufgabe

Es seien μ und ν zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Dann heißt

$$H(\nu|\mu) := \begin{cases} \int_\Omega \log \frac{d\nu}{d\mu} d\nu & : \quad \text{falls } \nu \ll \mu \\ \infty & : \quad \text{sonst;} \end{cases}$$

die *relative Entropie* von ν bezüglich μ oder auch *Kullback-Leibler Abstand* von ν und μ (obwohl H nicht symmetrisch in beiden Variablen ist und nicht einmal die Symmetrisierung $\tilde{H}(\mu|\nu) := (H(\mu|\nu) + H(\nu|\mu))/2$ die Dreiecksungleichung erfüllt).
Zeigen Sie:

(a) Es gilt $H(\nu|\mu) = \int_\Omega \frac{d\nu}{d\mu} \log \frac{d\nu}{d\mu} d\mu$, falls $\nu \ll \mu$. Folgt in diesem Fall $H(\nu|\mu) < \infty$?

(b) $H(\cdot|\mu)$ ist nichtnegativ auf der Menge $\mathcal{M}^1(\Omega, \mathcal{F})$ der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{F})$ und μ ist die einzige Nullstelle.

(c) Für fixiertes μ ist $H(\cdot|\mu)$ konvex auf $\mathcal{M}^1(\Omega, \mathcal{F})$; das heißt, für $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{M}^1(\Omega, \mathcal{F})$ und alle $\lambda \in (0, 1)$ gilt
$$H(\lambda\nu_1 + (1-\lambda)\nu_2|\mu) \leq \lambda H(\nu_1|\mu) + (1-\lambda)H(\nu_2|\mu).$$

(d) $\|\nu - \mu\|^2 \leq 2H(\nu|\mu)$, wobei $\|\cdot\|$ die Totalvariation bezeichnet; andererseits existiert kein $C \in (0, \infty)$ mit $H(\nu|\mu) \leq C\|\nu - \mu\|^2$ für alle $\mu, \nu \in \mathcal{M}^1(\Omega, \mathcal{F})$.

(e) Berechnen Sie $H(\cdot|\mu)$ für $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ und $\mu = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$.

Hinweis: Jensen'sche Ungleichung; zu (d): Verwenden Sie das Resultat aus Aufgabe 1 und die Ungleichung

$$|x - 1| \leq \sqrt{\frac{1}{3} f(x) g(x)} \quad , x \geq 0,$$

mit $f(x) = 4 + 2x$ und $g(x) = x \ln x - x + 1$, sowie die Hölder'sche Ungleichung.

(10 Punkte)

Zusatzaufgabe

Es seien $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und μ signierte Maße auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Zeigen Sie, dass aus der Konvergenz

$$\lim_{n \to \infty} \mu_n(A) = \mu(A), \quad \forall A \in \mathcal{F},$$

noch nicht die gleichmäßige Konvergenz

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{A \in \mathcal{F}} |\mu_n(A) - \mu(A)| = 0$$

folgt (welche nach dem 9. Übungsblatt für endliche signierte Maße gleichbedeutend zur Konvergenz in Variationsnorm ist).

(5 Punkte)

Gesamt: 20 + 5 Punkte