TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Institut für Mathematik
Prof. Dr. M. Scheutzow / A. Drewitz

SS 2010
Abgabe
30.06.2010

11. Übung
Maß- und Integrationstheorie

1. Aufgabe

Es seien ν_1, ν_2 und μ endliche Maße, sodass $\nu_1, \nu_2 \ll \mu$. Zeigen Sie, dass für die Variationsnorm $\|\cdot\|$ gilt:

$$\|\nu_1 - \nu_2\| = \|\frac{d\nu_1}{d\mu} - \frac{d\nu_2}{d\mu}\|_{\mathcal{L}^1(\mu)}.$$

(5 Punkte)

2. Aufgabe

Es sei $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion, welche rechtsseitig stetig ist und es bezeichne μ_F das zugehörige Maß auf $\mathfrak{B}([a, b])$.

Zeigen Sie, dass μ_F genau dann singulär bezüglich $\lambda_{|\mathfrak{B}([a,b])}$ ist, wenn für alle $\varepsilon > 0$ Punkte $a \le s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \cdots < s_n < t_n \le b$ mit $\sum_{i=1}^n (t_i - s_i) \le \varepsilon$ und $\sum_{i=1}^n |F(t_i) - F(s_i)| \ge V_F([a, b]) - \varepsilon$ existieren.

(5 Punkte)

3. Aufgabe

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine absolutstetige Funktion sowie $N \in \mathfrak{A}([a, b])$ mit $\lambda_{|\mathfrak{A}([a,b])}(N) = 0$. Zeigen Sie, dass auch $f(N)$ eine Lebesgue-Nullmenge ist.

(5 Punkte)

4. Aufgabe

Vervollständigen Sie den Beweis von Bemerkung 10.9; das heisst, zeigen Sie

$$F_{|\mu|} = V_{F_\mu}$$

mit der entsprechenden Notation.

(5 Punkte)

Gesamt: 20 Punkte