TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Institut für Mathematik
Prof. Dr. M. Scheutzow / A. Drewitz

SS 2010
Abgabe
07.07.2010

12. Übung
Maß- und Integrationstheorie

1. Aufgabe

Es sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ $\lambda_{|(a,b)}$-fast überall differenzierbar. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g(x) := \begin{cases} f'(x) & : \quad \text{falls } f'(x) \text{ existent,} \\ \text{beliebig} & : \quad \text{sonst,} \end{cases}$$

$(\mathfrak{A}((a,b)), \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$-messbar ist.

(5 Punkte)

2. Aufgabe

Es sei $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ mit $\lambda(B) = 0$. Beweisen Sie die Existenz einer stetigen, monoton wachsenden Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \infty$$

für alle $x \in B$ (also anschaulich "$f'(x) = \infty$").

Hinweis: Es sei $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine fallende Folge offener Mengen mit $\lambda(U_n) \leq 2^{-n}$ und $U_n \supset B$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie nun $f_n(x) := \lambda((-\infty, x) \cap U_n)$ und $f := \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$.

(5 Punkte)

3. Aufgabe

Es sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ eine Funktion von beschränkter Variation mit $\int f \, d\lambda < \infty$. Zeigen Sie, dass $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ gilt.

(5 Punkte)

4. Aufgabe

Es sei (f_n) eine Folge nichtfallender reellwertiger Funktionen auf $[a,b]$ mit

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) < \infty, \quad \text{für alle } x \in [a,b].$$

Zeigen Sie, dass

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

für λ-f.a. $x \in [a,b]$ gilt.

Anleitung:

(a) Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \leq f'(x) < \infty$ und somit $f_n'(x) \to 0$ λ-f.ü. gilt.

(b) Wählen Sie $n_1, n_2, \ldots$ mit $\sum_{j > n_k} f_j(b) \leq 2^{-k}$ und wenden Sie (a) auf $g_k(x) := f(x) - \sum_{j=1}^{n_k} f_j(x) = \sum_{j > n_k} f_j(x)$ an.

(5 Punkte)

Gesamt: 20 Punkte