

2. Übung Maß- und Integrationstheorie

1. Aufgabe

Zeigen Sie für ein Mengensystem \mathcal{D} auf einer Menge Ω und die Aussagen

- (a) \mathcal{D} erfüllt (i), (ii), (iii);
- (b) \mathcal{D} erfüllt (i), (ii'), (iii);
- (c) \mathcal{D} erfüllt (i), (ii'), (iii');
- (d) \mathcal{D} erfüllt (i), (ii), (iii');

die folgenden Implikationen:

$$(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Rightarrow (d).$$

Hierbei sind die Eigenschaften (i), (ii), (iii), (ii') und (iii') gemäß Definition 3.14 und der darauf folgenden Bemerkung gewählt.

(5 Punkte)

2. Aufgabe

Zeigen Sie: Jede σ -Algebra enthält entweder endlich viele oder überabzählbar unendlich viele Elemente.

Hinweis: Nehmen Sie an, \mathfrak{A} sei eine σ -Algebra mit abzählbar unendlich vielen Elementen und betrachten Sie die Mengen $M_x := \bigcap_{B \in \mathfrak{A} \text{ mit } x \in B} B$.

(6 Punkte)

3. Aufgabe

Zeigen Sie, dass die Vereinigung zweier σ -Algebren über demselben Grundraum im Allgemeinen keine σ -Algebra mehr ist.

(4 Punkte)

4. Aufgabe

Zeigen Sie die Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes.

(5 Punkte)

Gesamt: 20 Punkte