TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2010
Institut für Mathematik **Abgabe**
Prof. Dr. M. Scheutzow / A. Drewitz 5.05.2010

3. Übung
Maß- und Integrationstheorie

1. Aufgabe

Es sei $\mathcal{F}_0$ die Algebra in $\mathbb{Q}$, die von den links halboffenen Intervallen $(a,b] = \{\omega \in \mathbb{Q} | a < \omega \leq b\}$, $a, b \in \mathbb{Q}$ erzeugt wird. Sei außerdem $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_0)$. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{F}$ ist die Potenzmenge von $\mathbb{Q}$.

(b) Das Zählmaß μ (d.h. $\mu(A)$ ist die Anzahl der Punkte in der Menge A) ist σ-endlich auf $\mathcal{F}$, aber nicht auf $\mathcal{F}_0$.

(c) Es gibt Mengen $A \in \mathcal{F}$, deren Maß endlich ist, die aber nicht durch Mengen aus $\mathcal{F}_0$ approximiert werden können, d.h. es gibt keine Folge $A_n \in \mathcal{F}_0$ mit $\mu(A \triangle A_n) \to 0$.

(d) Ist λ ein Maß mit $\lambda = 2\mu$, dann gilt zwar $\lambda = \mu$ auf $\mathcal{F}_0$, aber nicht auf $\mathcal{F}$.

Die Folgerungen 3.33 und 3.36 des Fortsetzungs- bzw. des Approximationssatzes können bei diesem Beispiel nicht angewandt werden. Welche der Voraussetzungen sind hier nicht erfüllt?

(6 Punkte)

2. Aufgabe

Es sei $\mathcal{U}$ die Familie aller Teilmengen von $\mathbb{R}$, welche sich als endliche Vereinigung von Intervallen schreiben lassen. Hierauf definieren wir die Funktion $\mu : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ mittels

$$\mu(U) = \begin{cases} 1 & : \quad \text{falls es ein } \varepsilon > 0 \text{ mit } (0,\varepsilon) \subset U \text{ gibt,} \\ 0 & : \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass μ endlich additiv, nicht jedoch σ-additiv ist. **(5 Punkte)**

3. Aufgabe

Wir definieren für $A \subseteq E := [0,1]^2$ die Funktion

$$\eta(A) := \inf \Big\{ \sum_{k=1}^{n} m(R_k) : n \in \mathbb{N}, \bigcup_{k=1}^{n} R_k \supseteq A, R_1, \ldots, R_n \in \mathfrak{S} \Big\}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Menge $\{(x,y) | \, x, y \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\}$, dass η nicht subadditiv ist und nicht mit dem äußeren Maß λ^* übereinstimmt.

(5 Punkte)

4. Aufgabe

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie:

(a) Für beliebige $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subseteq B$ gilt $\mu(A) \leq \mu(B)$.

(b) Ist in (a) zusätzlich $\mu(A) < \infty$, dann gilt $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.

(c) Sind $A, B \in \mathcal{A}$ beliebig und gilt $\mu(A) < \infty$ oder $\mu(B) < \infty$, so ist $|\mu(A) - \mu(B)| \leq \mu(A \triangle B)$.

(d) Für eine beliebige Folge $\mathcal{A}$-meßbarer Mengen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt $\mu(\cup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$ *(Subadditivität)*.

(4 Punkte)

Gesamt: 20 Punkte