TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2010
Institut für Mathematik **Abgabe**
Prof. Dr. M. Scheutzow / A. Drewitz 12.05.2010

4. Übung
Maß- und Integrationstheorie

1. Aufgabe

Wir betrachten die per $f(0) = 0$, $f(x) = x \sin(1/x)$ für $x \in [0, 1/\pi]$ definierte Funktion auf $[0, 1/\pi]$. Bestimmen Sie $\lambda(\{x : f(x) \geq 0\})$.

(5 Punkte)

2. Aufgabe

Zeigen Sie, dass, wenn μ aus Theorem 3.31 nicht σ-additiv sondern nur endlich additiv auf $\mathfrak{S}$ ist, ein Element A des Halbrings $\mathfrak{S}$ existiert, für welches $\mu^*(A) < \mu(A)$ gilt.

(5 Punkte)

3. Aufgabe

Es sei $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie von messbaren Funktionen, welche von einem messbaren Raum nach $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$ abbilden. Zeigen Sie, dass das punktweise Supremum $\sup\{f_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ nicht notwendigerweise messbar ist.

(5 Punkte)

4. Aufgabe

Gegeben seien messbare numerische Funktionen $f_1, f_2, \ldots : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$. Zeigen Sie, dass Wohldefiniertheit vorausgesetzt, die Funktionen

$$\inf_n f_n, \ \sup_n f_n, \ \liminf_{n\to\infty} f_n, \ \limsup_{n\to\infty} f_n$$

messbare numerische Funktionen sind.

(5 Punkte)

Gesamt: 20 Punkte