TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2010
Institut für Mathematik **Abgabe**
Prof. Dr. M. Scheutzow / A. Drewitz 19.05.2010

5. Übung
Maß- und Integrationstheorie

1. Aufgabe

Es sei f eine nichtnegative messbare numerische Funktion auf einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit $\mu(\Omega) < \infty$. Zeigen Sie:

(a) Nimmt die Funktion f nur ganzzahlige Werte an, so gilt $\int f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(f \geq n)$.

(b) Die Funktion f (nicht notwendigerweise ganzzahlig) ist genau dann μ-integrierbar, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(f \geq n) < \infty \tag{1}$$

gilt.

(c) Aus (1) folgt $\lim_{n \to \infty} n\mu(f \geq n) = 0$.

(5 Punkte)

2. Aufgabe

Beweisen Sie die Behauptung 5.9: Ist f eine μ-integrierbare numerische Funktion auf $(\Omega, \mathcal{A})$, dann gilt $|f| < \infty$ μ-f.ü., und es existiert eine reellwertige μ-integrierbare Funktion g mit $f = g$ μ-f.ü. Insbesondere gilt $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$.

(5 Punkte)

3. Aufgabe

Es sei f eine numerische Funktion auf einem messbaren Raum. Zeigen Sie:

(a) Ist f messbar, dann ist f genau dann integrierbar, wenn $|f|$ integrierbar ist.

(b) Im Allgemeinen ist Messbarkeit von f nicht äquivalent zur Messbarkeit von $|f|$.

(5 Punkte)

4. Aufgabe

Es seien $E = [0, 1]$ und λ das Lebesgue-Maß auf E. Durch $f_n(x) = ne^{-nx}$, $n = 1, 2, \ldots$ ist auf E eine Folge nichtnegativer Funktionen definiert. Zeigen Sie, dass (f_n) λ-f.ü. gegen eine Funktion f konvergiert, wobei

$$\int_E f \, d\lambda \neq \lim_{n \to \infty} \int_E f_n \, d\lambda$$

gilt. Weshalb ist hier der Lebesgue'sche Satz nicht anwendbar?

(5 Punkte)

Gesamt: 20 Punkte