TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2010
Institut für Mathematik **Abgabe**
Prof. Dr. M. Scheutzow / A. Drewitz 26.05.2010

6. Übung
Maß- und Integrationstheorie

1. Aufgabe

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine $(\mathcal{F}, \mathfrak{B})$-messbare Funktion. Man definiert das *essentielle Supremum* von f als

$$\operatorname{ess\,sup} f := \inf\{c \in \mathbb{R} : \mu(\{f \geq c\}) = 0\}.$$

Wie üblich ist per Definitionem $\inf \emptyset := \infty$.
Zeigen Sie:

(a) Es seien nun f eine stetige und g eine messbare Funktion von $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \lambda)$ nach $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Gilt $f = g$ λ-fast überall, d. h. es existiert eine Nullmenge $N \in \mathfrak{B}$ mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in N^c$, so folgt

$$\operatorname{ess\,sup} f = \operatorname{ess\,sup} g = \sup f.$$

(b) Für jede messbare reellwertige Funktion f gilt $\operatorname{ess\,sup} f \leq \sup f$.

(c) Sind f und g messbare Funktion von $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ nach $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ mit $g \geq 0$ μ-fast überall, dann folgt

$$fg \leq (\operatorname{ess\,sup} f)g$$

μ-fast überall.

(5 Punkte)

2. Aufgabe

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in I$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass

(a) $f(t, \cdot)$ für jedes $t \in I$ μ-integrierbar ist;

(b) $\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, \omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ existiert;

(c) eine Umgebung $U \subset I$ von t_0 und eine μ-integrierbare Funktion $g : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ existieren mit $|\frac{f(t,\omega)-f(t_0,\omega)}{t-t_0}| \leq g(\omega)$ für alle $(t, \omega) \in (U \backslash \{t_0\}) \times \Omega$.

Wir definieren nun $F(t) := \int_\Omega f(t, \omega)\mu(d\omega)$. Zeigen Sie, dass F in t_0 differenzierbar ist mit $F'(t_0) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, \omega)\mu(d\omega)$.

(5 Punkte)

3. Aufgabe (Lemma von Scheffé)

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum sowie f und f_n für alle $n \in \mathbb{N}$ nicht-negative Funktionen aus $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ mit $f_n \to f$ μ-fast überall und $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu$.
Zeigen Sie, dass hieraus schon die Konvergenz von f_n gegen f im Mittel, d. h. bezüglich $|| \cdot ||_1$ folgt.

(5 Punkte)

4. Aufgabe

Es sei $\mathfrak{M}$ das System aller meßbaren reellwertigen Funktionen auf einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit $\mu(\Omega) < \infty$. Beweisen Sie folgende Aussagen

(a) Auf $\mathfrak{M}$ wird durch

$$\rho(f,g) := \int \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\, d\mu, \quad f,g \in \mathfrak{M}$$

eine Metrik definiert (mit der Konvention, dass zwei Funktionen als identisch angesehen werden, wenn sie μ-f.ü. übereinstimmen).

(b) Eine Folge (f_n) von Funktionen aus $\mathfrak{M}$ konvergiert genau dann dem Maße nach gegen $f \in \mathfrak{M}$, wenn $\lim_{n\to\infty} \rho(f_n, f) = 0$ gilt. Die Konvergenz dem Maße nach ist also metrisierbar.

(c) Der metrische Raum $(\mathfrak{M}, \rho)$ ist vollständig.

(5 Punkte)

Gesamt: 20 Punkte