TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2010
Institut für Mathematik **Abgabe**
Prof. Dr. M. Scheutzow / A. Drewitz 02.06.2010

7. Übung
Maß- und Integrationstheorie

1. Aufgabe

Zeigen Sie: Für ein endliches Maß μ ist eine Familie $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ genau dann gleichgradig integrierbar, wenn eine Funktion $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ existiert derart, dass

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x)/x = \infty \quad \text{und} \quad \sup_{\lambda\in\Lambda} \int \varphi(|f_\lambda|)\, d\mu < \infty.$$

(5 Punkte)

2. Aufgabe

Es sei μ das Zählmaß auf $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$. Zeigen Sie, dass eine Folge reellwertiger Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann dem Maße nach gegen eine $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-messbare Funktion f konvergiert, falls $(f_n)_{n\in N}$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

(5 Punkte)

3. Aufgabe

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass für ein endliches Maß μ und $1 \le p < q \le \infty$ die Beziehung $\mathcal{L}^q(\mu) \subset \mathcal{L}^p(\mu)$ gilt.
Ist diese Inklusion auch für nicht-endliche Maße μ erfüllt? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.
Beweisen Sie weiterhin, dass die Einbettung

$$\begin{aligned} J : (\mathcal{L}^q(\mu), ||\cdot||_q) &\to (\mathcal{L}^p(\mu), ||\cdot||_p) \\ f &\mapsto f \end{aligned}$$

von $\mathcal{L}^q(\mu)$ nach $\mathcal{L}^p(\mu)$ stetig ist.

(5 Punkte)

4. Aufgabe

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $p, q \in (1,\infty)$ derart gewählt, dass $1/p + 1/q = 1$. Man sagt, dass eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ schwach gegen $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ konvergiert, falls für alle $g \in \mathcal{L}^q(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n g\, d\mu = \int_\Omega f g\, d\mu$$

gilt. Zeigen Sie, dass die Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich $||\cdot||_p$ die schwache Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f impliziert.

(5 Punkte)

Gesamt: 20 Punkte