TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2010
Institut für Mathematik **Abgabe**
Prof. Dr. M. Scheutzow / A. Drewitz 09.06.2010

8. Übung
Maß- und Integrationstheorie

1. Aufgabe

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine bezüglich des Lebesgue-Maßes integrierbare Funktion. Zeige für festes $a > 0$:

(a) Für λ-fast alle $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\frac{x}{a} + n)$ absolut konvergent.

(b) $F(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\frac{x}{a} + n)$ ist periodisch mit Periode a und integrierbar auf $[0, a]$ bezüglich des Lebesgue-Maßes.

(5 Punkte)

2. Aufgabe

Es sei

$$\begin{aligned} f : [1, \infty) \times [0, 1] &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto e^{-xy} - 2e^{-2xy}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die iterierten Integrale

$$\int_0^1 \int_1^\infty f(x, y)\lambda(dx)\lambda(dy)$$

und

$$\int_1^\infty \int_0^1 f(x, y)\lambda(dy)\lambda(dx)$$

nicht übereinstimmen. Weshalb ist hier der Satz von Fubini nicht anwendbar?

(5 Punkte)

3. Aufgabe

Es seien $(X, \mathcal{F}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ σ-endliche Maßräume sowie $f \in L^1(\mu)$ und $g \in L^1(\nu)$. Zeigen Sie, dass $fg \in L^1(\mu \otimes \nu)$ folgt sowie die Gleichheit

$$\int_{X\times Y} fg\, d(\mu \otimes \nu) = \int_X f\, d\mu \cdot \int_Y g\, d\nu$$

gilt.

(5 Punkte)

4. Aufgabe

(a) Zeigen Sie, dass für eine Menge Y die Beziehung $\mathcal{P}(Y) \otimes \mathcal{P}(Y) = \mathcal{P}(Y \times Y)$ i. A. nicht richtig ist.

(b) Zeigen Sie, dass für einen metrischen Raum (oder alternativ einen topologischen Hausdorffraum) Y mit card $Y > \aleph_1$ die Diagonale nicht in $\mathfrak{B}(Y) \otimes \mathfrak{B}(Y)$ liegt und $\mathfrak{B}(Y) \otimes \mathfrak{B}(Y) \neq \mathfrak{B}(Y \times Y)$ gilt.

Hinweis zum ersten Teil: Betrachten Sie die σ-Algebra, welche von Mengen $A \subset Y \times Y$ erzeugt wird, wobei A und A^c als Vereinigung von höchstens $\aleph_1$ Rechtecken geschrieben werden kann. Untersuchen Sie nun die Diagonale von $Y \times Y$.

(5 Punkte)

Gesamt: 20 Punkte