Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. T. Stykel, C. Kreusler

Sommersemester 2011

Differentialgleichungen II

10.Übungsblatt

Abgabe in der Übung am 27. Juni

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Zeige, daß lineare, beschränkte Operatoren sowie Lipschitz-stetige Operatoren hemistetig sind.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Ein Banachraum heißt *strikt konvex*, falls aus $\|x\| \leq 1$ und $\|y\| \leq 1$ und $x \neq y$ folgt: $\|x + y\| < 2$. Ist nun X ein reflexiver Banachraum, dessen Dualraum strikt konvex ist, so gibt es zu jedem $x \in X$ genau ein Element $Jx \in X^*$, so daß

$$\langle Jx, x \rangle = \|x\|^2 = \|Jx\|_{V'}^2.$$

Die Abbildung $J : X \to X'$ heißt *Dualitätsabbildung*.
Zeige, daß die Dualitätsabbildung $J : X \to X'$ demistetig, strikt monoton und koerzitiv ist. Ist X ein Hilbertraum, so folgt sogar starke Monotonie.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Sei V ein reeller, reflexiver Banachraum und $A : V \to V'$. Wir nennen hier A Gâteaux-differenzierbar[1], falls es einen Operator $A' : V \to L(V, V')$ gibt, so daß für beliebige $u, v, w \in V$ gilt

$$\langle A'(u)v, w \rangle = \lim_{t \to 0} \frac{\langle A(u + tv) - A(u), w \rangle}{t}.$$

Zeige:

(i) Ist A linear, so ist A Gâteaux-differenzierbar und A' ist konstant.

(ii) Sei A Gâteaux-differenzierbar und für alle $u, v \in V$ sei die Funktion

$$t \mapsto \langle A'(u + tv)v, v \rangle$$

stetig auf $[0, 1]$. Dann ist A genau dann monoton, falls für beliebige $u, v \in V$

$$\langle A'(u)v, v \rangle \geq 0$$

gilt.

[1] Dies ist die Gâteaux-Ableitung bezüglich der schwach*-Topologie in V'.