TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. T. Stykel, C. Kreusler

Sommersemester 2011

Differentialgleichungen II

2.Übungsblatt

Abgabe zusammen mit dem 1. Übungsblatt in der Übung am 2. Mai

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet mit $0 \in \Omega$. Bestimme jeweils, für welche $p \in [1, \infty)$ die Funktion u in $W^{1,p}(\Omega)$ liegt.

(i) $u(x) := \ln |x|$

(ii) $u(x) := |x|^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

(iii) $u(x) := 1$, falls x nur rationale Komponenten besitzt und $u(x) := 0$ sonst

Aufgabe 2: **3 Punkte**

Sei $v \in L^1(a, b)$. Wir definieren die absolut stetige Funktion

$$u(x) := \int_{x_0}^{x} v(\xi) d\xi, \quad x \in [a, b],\ x_0 \in [a, b] \text{ fest.}$$

Zeige, daß v die verallgemeinerte Ableitung von u in $[a, b]$ ist.

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Sei $(u_n) \subset L^1(a, b)$ eine Folge von Funktionen, die bezüglich der $L^1(a, b)$-Norm gegen u konvergiere. Außerdem mögen die schwachen Ableitungen u_n' als Funktionen im $L^1(a, b)$ existieren und in $L^1(a, b)$ gegen v konvergieren. Zeige, daß dann die schwache Ableitung von u existiert und gleich v ist.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Beweise die folgenden Aussagen.

(i) Es gilt

$$\{\psi' \mid \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\} = \{\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mid \int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0\}$$

(ii) Es sei $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\int_{\mathbb{R}} \eta(t) dt = 1$. Dann gibt es zu jedem $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ genau ein $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ und genau ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\phi = \psi' + \alpha\eta$.

(iii) Erfüllt $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ die Gleichung

$$\int_{\mathbb{R}} u(t)\phi'(t) dt = 0$$

für jedes $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, so gibt es eine Konstante $\beta \in \mathbb{R}$ mit $u = \beta$ fast überall in $\mathbb{R}$.