

Differentialgleichungen II

3. Übungsblatt

Abgabe in der Übung am 9. Mai

Aufgabe 1:

4 Punkte

Seien $u, v \in H^1(a, b)$. Beweise die Produktregel $(uv)' = uv' + u'v$.

Aufgabe 2:

3 Punkte

Zeige, daß $C_0^\infty(a, b)$ nicht dicht ist in $H^1(a, b)$.

Aufgabe 3:

4 Punkte

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ mit beschränkten Ableitungen. Zeige:

Für $u \in H^1(\Omega)$ gilt $\psi \circ u \in H^1(\Omega)$ und

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\psi \circ u) = (\psi' \circ u) \frac{\partial u}{\partial x_k}$$

für $k = 1, \dots, n$.

Aufgabe 4:

4 Punkte

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, welches den Nullpunkt enthält, und $u \in H_0^1(\Omega)$. Zeige, daß auch $u \in H_0^1(\Omega \setminus \{0\})$.

Hinweis: Zeige zunächst, daß man in der H^1 -Norm jedes $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ durch die durch

$$\phi_k(x) := |x|^{1/k} \omega(k^k |x|) \phi(x)$$

gegebene Funktionenfolge approximieren kann, wobei $\omega \in C^\infty(\mathbb{R})$ ist mit $\omega(t) = 0$ für $t < 1$ und $\omega(t) = 1$ für $t > 2$.