Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. T. Stykel, C. Kreusler

Sommersemester 2011

Differentialgleichungen II

4.Übungsblatt

Abgabe in der Übung am 16. Mai

Aufgabe 1: **4 Punkte**

(a) Zeige, daß für $v \in L^2(a,b)$

$$\|v\|_{-1,2} \leq \frac{(b-a)}{\sqrt{2}} \|v\|_{0,2}$$

gilt.

(b) Zeige, daß für $v \in H^1(a,b)$

$$\|v\|_{0,2} \leq \frac{b-a}{2} |v|_{1,2} + \sqrt{b-a}\, |\overline{v}|$$

gilt, wobei $\overline{v} := (b-a)^{-1} \int_a^b v(\xi) d\xi$ ist.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

In dieser Aufgabe benötigt man den Satz von Gauß in der folgenden Form:

> Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit hinreichend glattem Rand und äußerem Einheitsnormalenfeld ν und sind $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$, so gilt für alle $k = 1, \ldots, n$:
>
> $$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_k} \cdot v dx = -\int_\Omega u \cdot \frac{\partial v}{\partial x_k} dx + \int_{\partial\Omega} \nu_k u v do.$$

Mit Ω und ν wie oben beweise die Greenschen Identitäten:

(i)

$$\int_\Omega u \cdot \Delta v dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} u \cdot \frac{\partial v}{\partial \nu} do$$

(ii)

$$\int_\Omega (\Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v) dx = \int_{\partial\Omega} (\frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot v - u \cdot \frac{\partial v}{\partial \nu}) do.$$

Hierbei ist wie üblich $\partial u / \partial \nu = \nabla u \cdot \nu$ die Richtungsableitung von u in Richtung ν.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein geeignetes Gebiet und $L_0^2 := \{v \in L^2(\Omega) \mid \int_\Omega v(x)dx = 0\}$. Wir versehen $L_0^2(\Omega)$ mit der üblichen L^2-Norm. (Dieser Raum ist in der Theorie der Navier-Stokes-Gleichungen von Bedeutung, bei der der Druck eines Fluids nur bis auf eine Konstante bestimmt ist.) Es sei weiterhin $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ der übliche Quotientenraum, versehen mit der Quotientennorm:

$$\|[u]\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} = \inf_{v\in[u]} \|u\|_{0,2}.$$

Zeige, daß $L_0^2(\Omega)$ und $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ isometrisch isomorph sind,

$$L_0^2(\Omega) \cong L^2(\Omega)/\mathbb{R}.$$

Aufgabe 4: **3 Punkte**

Beweise die Poincaré-Friedrichssche Ungleichung für das Intervall (a, b) mit der optimalen Konstanten $(b - a)/\pi$. (Hinweis: Fourierreihen).