Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. T. Stykel, C. Kreusler

Sommersemester 2011

Differentialgleichungen II

5.Übungsblatt

Abgabe in der Übung am 23. Mai

Aufgabe 1: **6 Punkte**

(a) Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} -(a(x)u'(x))' &= 0, \quad x \in (-1,1), \\ u(-1) &= 3, \\ u(1) &= 0, \end{cases}$$

wobei

$$a(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in (-1,0), \\ 1/2, & \text{falls } x \in (0,1). \end{cases}$$

Stelle die schwache Formulierung auf, untersuche das Problem auf Lösbarkeit und bestimme eine Lösung[1].

(b) Stelle die schwache Formulierung des Problems

$$\begin{cases} -u'' + cu' + du &= f \quad \text{in } (a,b), \\ u'(a) + c_a u(a) &= \alpha, \\ u'(b) + c_b u(b) &= \beta \end{cases}$$

auf, wobei $c, d \in L^\infty(a,b)$ seien, $f \in L^2(a,b)$ und $c_a, c_b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Kann man die Voraussetzung an f abschwächen?

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Seien $c, d \in L^\infty(a,b)$. Zeige, daß ein μ_0 existiert, so daß für alle $\mu > \mu_0$ die schwache Formulierung des Problems

$$\begin{cases} -u'' + cu' + du + \mu u = f \quad \text{auf } (a,b), \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

für alle $f \in H^{-1}(a,b)$ eindeutig in $H_0^1(a,b)$ lösbar ist.

[1] Hierzu ist es günstig, einmal mit Funktionen zu testen, die in $(-1,0)$ verschwinden, und ein anderes Mal mit Funktionen, die in $(0,1)$ verschwinden.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Sei $V = H_0^1(a,b)$, $f \in V^*$, $c, c', d \in L^\infty(a,b)$ und gelte für ein $\delta \in \mathbb{R}$

$$d(x) - \frac{1}{2}c'(x) \geq \delta > -\frac{\pi^2}{(b-a)^2} \quad \text{f.ü. in } (a,b).$$

Zeige, daß das Problem

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u'(x) + d(x)u(x) = f(x), & x \in (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

genau eine schwache Lösung $u \in V$ besitzt.

Aufgabe 4: **3 Punkte**

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein geeignetes Gebiet und $A : H^1(\Omega) \to (H^1(\Omega))'$ gegeben durch

$$\langle Au, v \rangle := \int_\Omega \nabla u \nabla v dx, \quad u, v \in H^1(\Omega).$$

Weiterhin sei $B : H^1(\Omega) \to (H^1(\Omega))'$ ein linearer Operator mit

$$\langle Bu, v \rangle \leq \|u\|_0 \|v\|_1 \quad u, v \in H^1(\Omega)$$

für ein $C > 0$. Zeige, daß es ein $\mu \in \mathbb{R}$ gibt, so daß die Gleichung

$$\langle Au, v \rangle + \langle Bu, v \rangle + \mu(u, v)_0 = \langle f, v \rangle, \quad v \in H^1(\Omega),$$

für alle $f \in (H^1(\Omega))'$ eindeutig lösbar ist.