Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. T. Stykel, C. Kreusler

Sommersemester 2011

Differentialgleichungen II

6.Übungsblatt

Abgabe in der Übung am 30. Mai

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Wir betrachten das Problem mit Neumann-Randdaten

$$\begin{cases} -(p(x)u'(x))' = f(x), \quad x \in (a,b), \\ p(a)u'(a) = p(b)u'(b) = 0 \end{cases}$$

mit $0 < \alpha \leq p(x) \leq \beta$, $x \in (a,b)$. Unter welchen Voraussetzungen hat das Problem genau eine Lösung? Wie ist es, wenn zusätzlich $f \in L^2(a,b)$ gefordert wird?
Hinweis: Betrachte den Raum $V := \{v \in H^1(a,b) \,|\, \overline{v} := (b-a)^{-1} \int_a^b v(\xi)d\xi = 0\}$ und benutze die Abschätzung aus der ersten Aufgabe des vierten Blattes.

Aufgabe 2: **2 Punkte**

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ der gelochte Einheitsball $\Omega := B(0,1) \backslash \{0\}$. Zeige, daß die Nullfunktion eine schwache Lösung des Randwertproblems

$$\Delta u = 0 \text{ auf } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| = 1, \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ist.

Aufgabe 3: **6 Punkte**

Die Koeffizienten $a_{ij} = a_{ji}, b_i, c$ eines elliptischen Differentialoperators seien wie üblich reellwertig und beschränkt auf einem genügend glatten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Darüber hinaus besitzen die Koeffizienten a_{ij} beschränkte erste und zweite Ableitungen, die Koeffizienten b_i besitzen beschränkte erste Ableitungen.

Gib die variationelle Formulierung des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A\nabla u) + b\nabla u + cu &= f \quad \text{auf } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \tau g \end{cases}$$

für beliebige $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^1(\Omega)$ an und zeige, daß es immer genau eine schwache Lösung gibt, falls für die Koeffizienten gilt, daß es eine Konstante $\mu > 0$ gibt mit

$$\Big(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} a_{ij}\Big) - \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} b_i\Big) + 2c \geq \mu.$$

Zeige weiterhin, daß sogar $\mu = 0$ gewählt werden kann, falls Ω beschränkt ist.