TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. T. Stykel, C. Kreusler

Sommersemester 2011

Differentialgleichungen II

7.Übungsblatt

Abgabe in der Übung am 6. Juni

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und $f \in L^2(\Omega)$. Zeige:

(i) Eine Funktion $u \in H^1(\Omega)$ ist eine schwache Lösung des Problems

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{auf } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

falls für alle $v \in H^1(\Omega)$ die Beziehung

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f v dx$$

gilt. Hierbei bezeichnet ν das äußere Einheitsnormalenfeld von $\partial\Omega$.

(ii) Das gegebene Problem hat genau denn eine schwache Lösung, falls

$$\int_\Omega f dx = 0.$$

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Zeige, daß für $V = H_0^1(a,b)$, $f \in V^*$, $a \in L^\infty(a,b)$ mit $a(x) \geq \mu > 0$ f.ü. in (a,b), das nichtlineare Randwertproblem

$$\begin{cases} -(a(x)u'(x))' + d(x, u(x)) = f(x), & x \in (a,b), \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

genau eine Lösung besitzt, wenn $d : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und im zweiten Argument gleichmäßig Lipschitz-stetig und monoton wachsend ist.

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Es sei $1 < p < \infty$. Zeige, daß die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}(= \mathbb{R}')$,

$$g(x) := \begin{cases} |x|^{p-2}x, & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

(i) strikt monoton ist,

(ii) für $p \geq 2$ gilt:

$$\langle g(x) - g(y), x - y \rangle \geq c|x - y|^p,$$

(iii) g für $p = 2$ stark monoton ist.

Aufgabe 4: **3 Punkte**

Sei $1 \leq p < n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Angenommen es gelte für alle $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ die Abschätzung $\|u\|_{L^q} \leq c\|\nabla u\|_{L^p}$. Zeige, daß dann schon $\frac{n}{q} = \frac{n}{p} - 1$ gelten muss. Hinweis: Betrachte $u_\lambda(x) := u(\lambda x)$.

Aufgabe 5: **4 Zusatzpunkte**

Sei V ein Banachraum. Zeige:

(i) Ist $1 < p < 2$ und $\mu > 0$, so gibt es keinen Operator $A : V \to V^*$ mit

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \;\geq\; \mu\|u - v\|^p, \quad u, v \in V.$$

(ii) Ist $p > 2$, $\beta > 0$ und $A : V \to V^*$ ein Operator mit

$$\|Au - Av\|_* \;\leq\; \beta\|u - v\|^{p-1},$$

so ist A konstant.