Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. T. Stykel, C. Kreusler

Sommersemester 2011

Differentialgleichungen II

8.Übungsblatt

Abgabe zusammen mit dem 9. Übungsblatt in der Übung am 20. Juni

Aufgabe 1: **4 Punkte**

(a) Es sei X ein separabler normierter Raum. Zeige, daß dann jede Teilmenge $A \subset X$ (versehen mit der induzierten Metrik) separabel ist.

(b) Zeige, daß ein normierter Raum X genau dann separabel ist, wenn es eine abzählbare Menge $M \subset X$ gibt mit

$$X = \overline{\text{span} M}.$$

Aufgabe 2: **3 Punkte**

Sei X ein reflexiver Banachraum und (x_n) eine Folge in X, (f_n) eine Folge im Dualraum X^*. Zeige:

(a) Ist $x_n \to x$ in X und $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in X^* , so folgt $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

(b) Die Behauptung $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$ gilt nicht, falls nur $x_n \rightharpoonup x$ in X und $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in X^* erfüllt ist.

Aufgabe 3: **3 Punkte**

(a) Zeige, daß in $X = \mathbb{R}^n$ schwache Konvergenz und starke Konvergenz äquivalent sind.

(b) Zeige, daß auch in l^1 starke und schwache Konvergenz äquivalent sind.
Hinweis: Es ist $(l^1)' \cong l^\infty$, genauer: $T : l^\infty \to (l^1)'$, $\langle Ty, x \rangle := \sum y_n x_n$, $x \in l^1$, ist ein isometrischer Isomorphismus [1].

[1] l^∞ bezeichnet den Raum der beschränkten Folgen, versehen mit der Norm $\|x\|_\infty := \sup_n |x_n|$. Weiterhin bezeichnet l^1 den Raum der Folgen mit $\|x\|_1 := \sum_n |x_n| < \infty$.

Aufgabe 4: **3 Punkte**

(a) Zeige, daß l^∞ nicht separabel ist.

(b) Zeige, daß l^1 nicht reflexiv ist.

Aufgabe 5: **4 Punkte**

Eine Teilmenge A eines Banachraumes X ist (stark) abgeschlossen, falls sie bezüglich der starken Konvergenz abgeschlossen ist. Sie ist schwach abgeschlossen, falls sie bezüglich der schwachen Konvergenz abgeschlossen ist, falls also der schwache Grenzwert einer schwach konvergenten Folge $(x_n) \subset A$ wieder in A liegt.

(a) Zeige, daß jede schwach abgeschlossene Menge auch stark abgeschlossen ist.

(b) Zeige, daß die Umkehrung im allgemeinen falsch ist.

(c) Zeige, daß jede konvexe stark abgeschlossene Menge auch schwach abgeschlossen ist.