TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. T. Stykel, C. Kreusler

Sommersemester 2011

Differentialgleichungen II

9.Übungsblatt

Abgabe zusammen mit dem 8. Übungsblatt in der Übung am 20.Juni

Aufgabe 1: **5 Punkte**

(i) Es seien V, W Banachräume. Wie üblich sei mit $L(V,W)$ der Raum der linearen, beschränkten Operatoren $A : V \to W$ bezeichnet, versehen mit der Operatornorm. Zeige, daß der Grenzwert $K \in L(V,W)$ einer Folge $(K_n) \subset L(V,W)$ kompakter Operatoren selbst kompakt ist.

(ii) Zeige, daß ein Operator $A \in L(V,W)$ mit endlich-dimensionalem Bild, $\dim(\operatorname{ran}(A)) < \infty$, kompakt ist.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Es sei $z \in l^\infty$ und $T_z : l^p \to l^p$ der Multiplikationsoperator, welcher durch

$$(T_z x)_n := z_n x_n$$

gegeben ist. Zeige, daß T_z genau dann kompakt ist, wenn z eine Nullfolge ist.
Hinweis: 1. Aufgabe

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Wir wollen den folgenden Satz von Leray und Schauder beweisen[1] .

> Es sei X ein Banachraum und $A : X \to X$ eine kompakte Abbildung. Dann besitzt die Gleichung
>
> $$u = Au, \quad u \in X \tag{1}$$
>
> eine Lösung, falls folgende *A-priori-Abschätzung* gilt:
>
> > Es gibt ein $r > 0$ derart, daß
> >
> > $$\|u\| \le r$$
> >
> > für jede Lösung u der Gleichung
> >
> > $$u = tAu, \quad u \in X, \quad 0 \le t < 1$$
> >
> > gilt[2].

[1] Dies ist ein Beispiel des wichtigen Prinzips: *A-priori-Abschätzung gibt Existenz.*

[2] Bemerkung: Die Lösbarkeit der Gleichung $u = tAu$ wird nicht behauptet!

Hierzu definieren wir die Menge $M := \{u \in X \,:\, \|u\| \leq 2r\}$ und die Abbildung

$$Bu := \begin{cases} Au, & \text{für } \|Au\| \leq 2r \\ \frac{2r\,Au}{\|Au\|} & \text{für } \|Au\| > 2r. \end{cases}$$

Zeige, daß B eine kompakte Abbildung der Menge M in sich ist. Folgere, daß es einen Fixpunkt für B geben muß und schließlich, daß dann auch eine Lösung von (1) existiert.

Benutze den Satz, um die Lösbarkeit des Problems

$$u(x) = \alpha \int_a^b \sin u(y) dy + f(x)$$

für $\alpha \in \mathbb{R}$ im Raum $\mathcal{C}([a, b])$ zu zeigen.