Technische Universität Berlin Sommersemester 2011
Institut für Mathematik
Prof. Dr. T. Stykel 26.04.2011

Kontrolltheorie

2. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblattes in der Übung am 3.05.2011

Aufgabe 1: (Kalman-Zerlegung)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $B \in \mathbb{R}^{n,m}$ und $\operatorname{Rang}([\,B,\ AB,\ A^2B,\ \ldots,\ A^{n-1}B\,]) = r < n$. Zeige:
Es gibt eine orthogonale matrix $V \in \mathbb{R}^{n,n}$, so dass

$$V^TAV = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}, \qquad V^TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

wobei $A_1 \in \mathbb{R}^{r,r}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{r,m}$ und das System $\dot{x} = A_1x + B_1u$ ist steuerbar.

Aufgabe 2: (Steuerbarkeit für die LTI-Systeme)

Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen für das LTI-System $\dot{x} = Ax + Bu$:

a) Das LTI System ist steuerbar.

b) $\operatorname{Rang}([\,B,\ AB,\ A^2B,\ \ldots,\ A^{n-1}B\,]) = n$.

c) Falls $p \neq 0$ ein Eigenvektor von A^T ist, dann gilt $p^TB \neq 0$.

d) $\operatorname{Rang}([\,\lambda I - A,\ B\,]) = n$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 3: (Realisierung)

Sei $[\,A,\ B,\ C,\ D\,]$ eine Realisierung der Übertragungsmatrix $G(s)$.

a) Bestimme eine Realisierung von $G^T(s)$.

b) Sei D invertierbar. Bestimme eine Realisierung von $G^{-1}(s)$.
Hinweis: Berechne die Inverse von

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & \mathbf{A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{bmatrix}. \end{aligned}$$