Technische Universität Berlin Sommersemester 2011
Institut für Mathematik
Prof. Dr. T. Stykel 10.05.2011

Kontrolltheorie

3. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblattes in der Übung am 17.05.2011

Aufgabe 1: (Stabilisierbare, aber nicht steuerbare Steuerungsprobleme)

Konstruiere ein Steuerungsproblem $\dot{x} = Ax + Bu$ mit $A \in \mathbb{R}^{2,2}$, $B \in \mathbb{R}^2$, welches nicht steuerbar ist, aber stabilisierbar.

Aufgabe 2: (Steuerbarkeit, Stabilisierbarkeit)

Überprüfe die folgenden Systeme auf Steuerbarkeit und Stabilisierbarkeit.

a) $\dot{x} = x + [0, 0, \ldots, 0, 1]^T u$

b) $$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

c) $$\dot{x} = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} u$$

Aufgabe 3: (Systemtransformationen)

Betrachte das LTI System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx. \end{aligned}$$

(a) Zeige, dass die Eigenschaften Steuerbarkeit, Stabilisierbarkeit, Beobachtbarkeit und Entdeckbarkeit invariant sind bzgl.

(i) der Basiswechsel im Zustandsraum: $x \mapsto Px$ für $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ regulär,

(ii) der Basiswechsel im Eingangsraum: $u \mapsto Qu$ für $Q \in \mathbb{R}^{m,m}$ regulär,

(iii) der Basiswechsel im Ausgangsraum: $y \mapsto Ry$ für $R \in \mathbb{R}^{p,p}$ regulär,

(iv) linearen Ausgangsrückführung $u \mapsto -Gy + v$ mit $G \in \mathbb{R}^{m,p}$.

(b) Zeige, dass die Steuerbarkeit und Stabilisierbarkeit invariant sind bzgl.

(v) linearer Zustandsrückführung $u \mapsto -Fx + v$ mit $F \in \mathbb{R}^{m,n}$.

Aufgabe 4: **(Kalman-Zerlegung)**

Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $B \in \mathbb{R}^{n,m}$, $C \in \mathbb{R}^{p,n}$ und sei (A, B, C) nicht steuerbar und nicht beobachtbar. Zeige, dass es eine orthogonale Matrix $V \in \mathbb{R}^{n,n}$ gibt, so dass

$$\begin{aligned} V^T A V &= \begin{bmatrix} A_{c\overline{o}} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ & A_{co} & A_{23} & A_{24} \\ & & A_{\overline{co}} & A_{34} \\ & & & A_{\overline{c}o} \end{bmatrix}, \qquad V^T B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ CV &= \begin{bmatrix} 0, & C_2, & 0, & C_4 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

wobei (A_{co}, B_2, C_2) steuerbar und beobachtbar ist.