Technische Universität Berlin Sommersemester 2011
Institut für Mathematik
Prof. Dr. T. Stykel 24.05.2011

Kontrolltheorie

4. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblattes in der Übung am 31.05.2011

Aufgabe 1: (Kronecker-Produkt)

a) Seien W, X, Y, Z Matrizen geeigneter Dimension, so dass die Produkte WX und YZ definiert sind. Zeige $(W \otimes Y)(X \otimes Z) = (WX) \otimes (YZ)$.

b) Seien S, G invertierbare Matrizen. Zeige, dass auch $S \otimes G$ invertierbar ist und dass $(S \otimes G)^{-1} = S^{-1} \otimes G^{-1}$.

c) Seien $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $B \in \mathbb{R}^{m,m}$. Die Matrix A habe die Eigenwerte $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ und B habe die Eigenwerte $\beta_1, \ldots, \beta_m$. Zeige, dass

$$\mathrm{Sp}(A \otimes B) = \{\lambda_i \beta_j \,|\, i = 1, \ldots, n;\; j = 1, \ldots, m\}.$$

Aufgabe 2: (Sylvester-Gleichung)

Seien $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $B \in \mathbb{R}^{m,m}$ und $W \in \mathbb{R}^{n,m}$.

a) Zeige, dass die Sylvester-Gleichung $AX + XB = -W$ äquivalent zu dem linearen Gleichungssystem $Mx = w$ ist, wobei

$$M = I_m \otimes A + B^T \otimes I_n, \quad x = \mathrm{vec}(X), \quad w = -\mathrm{vec}(W).$$

b) Zeige, dass die Sylvester-Gleichung $AX + XB = -W$ genau dann eine eindeutige Lösung hat, wenn A und $-B$ keine gemeinsamen Eigenwerte haben.

c) Zeige, dass die Sylvester-Gleichung $AX + XB = -W$ mit $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $B \in \mathbb{R}^{m,m}$, $W \in \mathbb{R}^{n,m}$ genau dann eine Lösung X hat, wenn die Matrizen

$$M_1 = \begin{bmatrix} A & W \\ 0 & -B \end{bmatrix}, \qquad M_2 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -B \end{bmatrix}$$

ähnlich sind.

Aufgabe 3: (Stabilisierung)

Betrachte das Steuerungsproblem einer Parabolantenne

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= \omega(t) \\ j\dot{\omega}(t) &= -r\omega(t) + ku(t) \end{aligned}$$

mit $k, j, r > 0$. Berechne alle stabilisierenden Zustandsrückführungsmatrizen $F \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ für das System.

Aufgabe 4: **(Konditionszahl der Lyapunov-Gleichung)**

Die *Konditionszahl* der Lyapunov-Gleichung $AX + XA^T = -W$ mit $A, W \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist definiert als

$$\kappa = 2\|A\|_F(\mathrm{Sep}(A))^{-1},$$

wobei $\mathrm{Sep}(A) = \min\limits_{\|X\|_F=1} \|AX + XA^T\|_F$ die *Separation* ist.

1. Zeige, dass $\mathrm{Sep}(A) = \|(I_n \otimes A + A \otimes I_n)^{-1}\|_2^{-1}$.

2. Sei $\tilde{X}$ die Lösung der gestörten Lyapunov-Gleichung $\tilde{A}\tilde{X} + \tilde{X}\tilde{A}^T = -\tilde{W}$ mit $\|\tilde{A} - A\|_F \leq \varepsilon\|A\|_F$ und $\|\tilde{W} - W\|_F \leq \varepsilon\|W\|_F$. Zeige: Ist $\varepsilon\kappa < 1$, dann gilt

$$\frac{\|\tilde{X} - X\|_F}{\|X\|_F} \leq \frac{2\varepsilon\kappa}{1 - \varepsilon\kappa}.$$