Technische Universität Berlin **SS 2012**
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. W. König
Assistenten: M. Wilke Berenguer
D. Hoffmann

Ausgabe: Mi 13.06.2012
Abgabe: Mi 20.06.2012

10. Übungsblatt „Wahrscheinlichkeitstheorie 1“
Grenzwertsätze

Gesamtpunktzahl: 20 Punkte

1. Hausaufgabe: **5 Punkte**

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit dem selben Erwartungswertungswert $\mathbb{E}(X_n) = E$ und $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = 0$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $|i - j| > m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Ferner gebe es Konstanten $C > 0, \beta < 1$ mit $\mathbb{V}(X_n) \leq Cn^{\beta}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{n}S_n$ in Wahrscheinlichkeit gegen E konvergiert.

2. Hausaufgabe: **5 Punkte**

(i) Benutzen Sie die Faltungseigenschaft der Poisson-Verteilung, um zu zeigen, dass für eine Poisson-verteilte Zufallsvariable Y_λ mit Parameter $\lambda \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{Y_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{w} X \quad \text{für } \lambda \to \infty,$$

wobei X eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist.

(ii) Verwenden Sie (i), um

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$$

zu berechnen.

3. Hausaufgabe: **4 Punkte**

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen und es sei

$$Y_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe von Lemma 4.3.8, dass Y_n für $n \to \infty$ in Verteilung gegen 0 konvergiert.

4. Hausaufgabe: **3 Punkte**

Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen, auf $\{-1, 1\}$ gleichverteilten Zufallsvariablen. Die Folge von Zufallsvariablen $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, gegeben durch

$$S_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}: \ S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

heißt symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit Start in Null.
Bestimmen Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes approximativ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $|S_{1.000.000}|$ kleiner ist als 1.000.
Hinweis: Für die Berechnung der Approximationen mit der Normalverteilung ist es hilfreich, sich eine Tabelle der Werte der Standardnormalverteilungsfunktion zu besorgen.

5. Hausaufgabe: Größenverzerrte Dichte **3 Punkte**

Sei X eine $[0,\infty)$-wertige Zufallsgröße mit Dichte f und endlicher Varianz. Weiterhin sei $\hat{X}$ eine Zufallsgröße mit Dichte $\hat{f}(x) := \frac{1}{c} x f(x)$.

(i) Bestimmen Sie c, so dass $\hat{f}$ eine Dichte ist.

(ii) Zeigen Sie
$$\mathbb{E}[\hat{X}] \geq \mathbb{E}[X].$$

Bemerkung: Das Ziel dieser Aufgabe ist die Erklärung des Effektes des Wartezeitparadoxes.