Technische Universität Berlin **SS 2012**
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. W. König
Assistenten: M. Wilke Berenguer
D. Hoffmann

Ausgabe: Mi 20.06.2012
Abgabe: Mi 27.06.2012

11. Übungsblatt „Wahrscheinlichkeitstheorie 1“

Markovketten

Gesamtpunktzahl: 20 Punkte

1. Hausaufgabe: Beispiel 9.2.9 **5 Punkte**

Sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$, also eine Partialsummenfolge von unabhängig identisch verteilten $\mathbb{Z}$-wertigen Zufallsgrößen, wie in Beispiel 9.1.4 definiert. Sei weiterhin $M_n = \max\{S_0, \dots, S_n\}$.

(i) Zeigen Sie, dass die Folge der M_n im Allgemeinen keine Markovkette bildet.

(ii) Zeigen Sie, dass die Folge der Paare (M_n, S_n) eine Markovkette bildet.

2. Hausaufgabe: Wettermodell **6 Punkte**

Das Wetter am Tag n wird durch die Zufallsgröße X_n beschrieben, die die Werte 0 (Regen) und 1 (Sonne) annimmt. Die Übergangsmatrix ist gegeben durch

$$P = \begin{pmatrix} 1-p_{01} & p_{01} \\ p_{10} & 1-p_{10} \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } p_{01}, p_{10} \in [0,1].$$

(i) Zeigen Sie

$$P^n = \frac{1}{p_{01}+p_{10}} \begin{pmatrix} p_{10} & p_{01} \\ p_{10} & p_{01} \end{pmatrix} + \frac{(1-p_{01}-p_{10})^n}{p_{01}+p_{10}} \begin{pmatrix} p_{01} & -p_{01} \\ -p_{10} & p_{10} \end{pmatrix}$$

und berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} P^n$.

(ii) Bestimmen Sie zunächst allgemein die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse

$$A = \{ \text{ am Tag der deutschen Einheit (2012) regnet es } \},$$
$$B = \{ \text{ das Osterwochenende 2013 (Fr-Mo) ist regenfrei } \},$$

jeweils unter der Annahme, dass es heute (am Tag 0) regnet beziehungsweise dass heute die Sonne scheint. Berechnen Sie dann die Wahrscheinlichkeiten für die konkreten Parameter $p_{01} = 0.4$ und $p_{10} = 0.3$.

3. Hausaufgabe: **6 Punkte**

Sei $X_1, X_3, X_5, \dots$ eine Folge von unabhängig identisch verteilten (u.i.v.) Zufallsgrößen mit

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2.$$

Definiere $X_{2k} := X_{2k-1}X_{2k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(i) Zeigen Sie, dass $X_2, X_4, X_6, \dots$ eine Folge von u.i.v. Zufallsgrößen mit Verteilung

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = -1) = 1/2.$$

ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Zufallsgrößen $X_1, X_2, X_3, \dots$ paarweise unabhängig sind. Ist die Familie $X_1, X_2, X_3, \dots$ unabhängig?

(iii) Berechnen Sie für alle $i, j \in \{1, -1\}$ und alle $m, n \in \mathbb{N}$

$$p_{i,j}^{(n)} := \mathbb{P}(X_{m+n} = j \mid X_m = i).$$

(iv) Zeigen Sie, dass die Chapman-Kolmogorov-Gleichungen für $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gelten.

(v) Ist $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Markovkette?

4. Hausaufgabe: **3 Punkte**

Sei P eine stochastische Matrix. Zeigen Sie, dass P^n für alle $n \in \mathbb{N}$ wieder eine stochastische Matrix ist.