Technische Universität Berlin **SS 2012**
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. W. König
Assistenten: M. Wilke Berenguer
D. Hoffmann
Ausgabe: Mi 04.07.2012
Abgabe: Mi 11.07.2012

Zusatzblatt - 13. Übungsblatt „Wahrscheinlichkeitstheorie 1“
Markovketten III

Zusatzpunkte: 20 Punkte

Stochastik-Sommer-Sause: am 11.7. ab 18h im Geodätenstand im Hauptgebäude. Alle WT-Studenten sind herzlich eingeladen.

Klausurstoff: Der Klausurstoff umfasst die Kapitel 1-5 und 9.

1. Hausaufgabe: **5 Punkte**
In dieser Aufgabe betrachten wir das Ehrenfest-Modell, d.h. eine Markovkette mit Zustandsraum $S = \{0, \ldots, N\}$, $N \in \mathbb{N}$, und Übergangsmatrix $P = \big(p(i,j)\big)_{i,j \in S}$, wobei

$$p(i, i+1) = \frac{N-i}{N}, \quad p(i, i-1) = \frac{i}{N}.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Binomialverteilung mit Parametern N und $\frac{1}{2}$ eine invariante Verteilung (ab jetzt mit π bezeichnet) für diese Markovkette ist.

(ii) Zeigen Sie, dass keine der Zeilen der n-Schritt-Übergangsmatrix P^n für $n \to \infty$ gegen π konvergiert. Was ist der Grund dafür?

(iii) Betrachten Sie nun die Markovkette mit Übergangsmatrix $Q := qI_{N+1} + (1-q)P$. Dabei ist P wie oben, $q \in (0,1)$ und I_{N+1} ist die $(N+1) \times (N+1)$ Einheitsmatrix. Zeigen Sie, dass π die eindeutige invariante Verteilung der Markovkette ist, und dass jede Zeile von Q^n für $n \to \infty$ gegen die Einzelwahrscheinlichkeiten von π konvergiert.

2. Hausaufgabe: **5 Punkte**
Prof. Will Gattwed besitzt r Regenschirme, welche er entweder morgens auf dem Weg zu seinem Büro oder abends auf dem Weg nach Hause benutzt. Jedes Mal, wenn es regnet und ein Regenschirm vorhanden ist, nimmt er einen Regenschirm mit. Falls es nicht regnet, nimmt er keinen Regenschirm mit. Wir nehmen an, dass es jeden Morgen und Abend, unabhängig von der Vergangenheit, mit Wahrscheinlichkeit p regnet. Wir interessieren uns für die Wahrscheinlichkeit, dass Prof. Gattwed auf seinen Wegen nass wird.
Genauer gesagt: Modellieren Sie den obigen Prozess durch eine geeignete Markovkette und

berechnen Sie ihre invariante Verteilung. Benutzen Sie diese als Startverteilung. Berechnen Sie dann die Wahrscheinlichkeit, dass Prof. Gattwed am 20.7.2012 auf dem Weg zu seinem Büro nass wird.

3. Hausaufgabe: **5 Punkte**

Gegeben sei die folgende stochastische Matrix auf $I = \{1, \ldots, 5\}$:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{8} & 0 & 0 & \frac{3}{8} & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die mittlere Rückkehrzeit der zugehörigen Markovkette in jedem Punkt aus I.

4. Hausaufgabe: Positive Rekurrenz einer Irrfahrt auf $\mathbb{N}_0$ **5 Punkte**

Mit Parametern $p_0, p_1, \dots \in (0,1)$ sei die stochastische Matrix $P = (p_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}_0}$ gegeben durch

$$p_{i,j} = \begin{cases} p_i, & \text{falls } j = i+1, \\ 1-p_i, & \text{falls } i \geq 1, \text{ und } j = i-1, \\ 1-p_0, & \text{falls } i = j = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definiere

$$\varrho_0 = 1 \qquad \text{und} \qquad \varrho_k = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{p_i}{1-p_{i+1}} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

(i) Zeigen Sie, dass P aperiodisch und irreduzibel ist.

(ii) Zeigen Sie, dass P genau dann positiv rekurrent ist, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} \varrho_k < \infty$ gilt. Ermitteln Sie in diesem Fall die invariante Verteilung.

(iii) Sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die eindimensionale Irrfahrt mit Start in 1, deren Schritte $S_{n+1} - S_n$ unabhängig sind und die Werte 1 und -1 mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ bzw. $1-p$ annehmen. Benutzen Sie Ihr Ergebnis aus (ii), um die erwartete Zeit des ersten Besuches in 0 zu ermitteln.