Technische Universität Berlin **SS 2012**
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. W. König
Assistenten: M. Wilke Berenguer
D. Hoffmann

Ausgabe: Mi 12.09.2012
keine Abgabe

Ferienblatt - 14. Übungsblatt „Wahrscheinlichkeitstheorie 1“

σ-Algebren und Maße

---

ohne Korrektur

1. Übungsaufgabe:
Sei $\Omega = \{a, b, c, d\}$. Geben sie vier σ-Algebren auf Ω an und bestimmen, wieviele σ-Algebren es auf Ω gibt.

2. Übungsaufgabe:
Seien Ω und Ω' beliebige Mengen und sei $f\colon \Omega \to \Omega'$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Ist $\mathcal{F}'$ eine σ-Algebra über Ω', so ist $f^{-1}(\mathcal{F}') = \{f^{-1}(A)\colon A \in \mathcal{F}\}$ eine σ-Algebra über Ω.

(ii) Ist $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra über Ω, so ist $f(\mathcal{F}) = \{f(A)\colon A \in \mathcal{F}\}$ eine σ-Algebra über Ω'.

3. Übungsaufgabe:
Es sei $\mathcal{I}$ eine nichtleere Indexmenge, und seien $\mathcal{F}_i,\ i \in \mathcal{I}$, σ-Algebren in einer Menge Ω.

(i) Zeigen Sie, dass dann auch $\bigcap\limits_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{F}_i$ eine σ-Algebra in Ω ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Vereinigung zweier σ-Algebren (in der gleichen Menge Ω) im Allgemeinen keine σ-Algebra ist.

4. Übungsaufgabe:
Sei zu $n \in \mathbb{N}$ das Mengensystem $\mathcal{E}_n = \{\{1\}, \dots, \{n\}\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ gegeben, und sei $\mathcal{F}_n = \sigma(\mathcal{E}_n)$ die von $\mathcal{E}_n$ über $\mathbb{N}$ erzeugte σ–Algebra. Zeigen Sie:

(i) $\mathcal{F}_n = \{\, A \subset \mathbb{N} :\ A \subset \{1, \dots, n\} \ \text{ oder } \ \{n+1, n+2, \dots\} \subset A \,\}$,

(ii) $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$,

(iii) $\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ ist keine σ–Algebra über $\mathbb{N}$.

5. Übungsaufgabe:
Sei $\mathcal{B}_n$ die Borel–σ–Algebra auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass

(i) $\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{K})$, wobei $\mathcal{K} = \{ K \subset \mathbb{R}^n \colon K \text{ kompakt} \}$.

(ii) $\mathcal{B}_n = \sigma(\{ (-\infty, b_1] \times \ldots \times (-\infty, b_n] : b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{Q} \})$.

6. Übungsaufgabe:
Es sei $\Omega = \mathbb{N}$ und $\mathcal{F} := \{ A \subset \mathbb{N} \colon A \text{ oder } A^c \text{ ist endlich} \}$. Ferner sei $\mu \colon \mathcal{F} \to [0, \infty]$ für alle $A \in \mathcal{F}$ definiert durch

$$\mu(A) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } A \text{ unendlich,} \\ 0, & \text{falls } A \text{ endlich.} \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine Algebra und μ ein σ-endlicher Inhalt auf $\mathcal{F}$ ist.

(ii) Ist μ σ-additiv?

(iii) Ist μ stetig in $\emptyset$?

(iv) Lässt sich μ zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{F})$ fortsetzen?

7. Übungsaufgabe:
Sei $\mathcal{P}$ die Menge der Wahrscheinlichkeitmaße auf einer abzählbaren Menge Ω. Zeigen Sie:

(i) $\mathcal{P}$ ist konvex.

(ii) Beschreiben Sie die *Extremalpunkte* von $\mathcal{P}$, und zeigen Sie, daß sich jedes $P \in \mathcal{P}$ als *Mischung* von Extremalpunkten darstellen läßt, d.h.

$$P = \sum_i \alpha_i P_i$$

mit $\alpha_i \geq 0$, $\sum_i \alpha_i = 1$, P_i extremal.

Dabei ist $Q \in \mathcal{P}$ Extremalpunkt, falls aus $\alpha Q_1 + (1 - \alpha) Q_2 = Q$ für $\alpha \in (0, 1)$, $Q_1, Q_2 \in \mathcal{P}$ folgt, dass $Q = Q_1 = Q_2$ ist.

8. Übungsaufgabe:

(i) Es sei $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \ldots\}$ eine abzählbar-unendliche Zerlegung von Ω und $\mathcal{F}$ die kleinste σ-Algebra, welche $\mathcal{D}$ enthält (sie wird dann auch mit $\sigma(\mathcal{D})$ bezeichnet). Beweisen Sie, dass $\mathcal{F}$ überabzählbar unendlich viele Elemente enthält.

(ii) Folgern Sie aus (i), dass es keine σ-Algebra mit abzählbar unendlich vielen Elementen gibt.