Technische Universität Berlin **SS 2012**
Fakultät II – Institut f. Mathematik
Dozent: Prof. Dr. W. König
Assistenten: M. Wilke Berenguer
D. Hoffmann

Ausgabe: Mi 02.05.2012
Abgabe: Mi 09.05.2012

4. Übungsblatt „Wahrscheinlichkeitstheorie 1“
Zufallsvariablen: Verteilung und Unabhängigkeit

Gesamtpunktzahl: 20 Punkte

1. Hausaufgabe: **4 Punkte**

Sei (Ω, p) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbb{P}$ das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß.
Beweisen Sie folgende Eigenschaften von $\mathbb{P}$:

(a) $\forall A, B \subset \Omega : \ (A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B))$ *Monotonie*

(b) $\forall A, B \subset \Omega : \ \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

(c) $\forall A_1, A_2, \ldots \subset \Omega : \ \mathbb{P}(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$ *σ-Subadditivität*

2. Hausaufgabe: **5 Punkte**

Beweisen Sie die *Formel von Sylvester* (auch bekannt als *Inklusions-Exklusionsformel*):
Sei (Ω, p) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbb{P}$ das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß. Für beliebige $n \geq 2$ und Ereignisse $A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$ ist

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots A_{i_n}).$$

3. Hausaufgabe: **6 Punkte**

Seien X, Y und Z unabhängige, zum Parameter $p \in (0,1)$ auf $\mathbb{N}$ geometrisch verteilte Zufallsvariable.

(i) Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

  (a) $\mathbb{P}(X \geq 2Y)$
  (b) $\mathbb{P}(X \neq Y)$
  (c) $\mathbb{P}(X + Y \leq Z)$

(ii) Bestimmen Sie die Verteilung von $M := \max\{X, Y\}$.

4. Hausaufgabe: **5 Punkte**

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Bernoulli-Variablen zum Parameter $q \in (0,1)$. Man bezeichne die 1 als Erfolg und die 0 als Misserfolg. Es seien nun Y_1 die Anzahl der Misserfolge vor dem ersten Erfolg und Y_2 die Anzahl der Misserfolge zwischen dem ersten und zweiten Erfolg.

Zeigen Sie: Y_1 und Y_2 sind unabhängig.