Technische Universität Berlin **SS 2012**
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. W. König
Assistenten: M. Wilke Berenguer
D. Hoffmann

Ausgabe: Mi 09.05.2012
Abgabe: Mi 16.05.2012

5. Übungsblatt „Wahrscheinlichkeitstheorie 1“
Gemeinsame Verteilung und Erwartungswert

Gesamtpunktzahl: 20 Punkte

1. Hausaufgabe: **3 Punkte**
Im Tutorium haben Sie folgendes Zufallsexperiment betrachtet: Zum Julklapp kommen n Kinder und bringen je ein Geschenk mit. Diese Geschenke werden gemischt und jedes Kind zieht ein Geschenk – wobei diese so verpackt wurden, dass sie für die Kinder ununterscheidbar sind – sodass am Ende wieder jedes Kind genau ein Geschenk hat.
Sei X_n die Anzahl der Kinder, die ihr eigenes Geschenk erhalten. Bestimmen Sie die Verteilung von X_n.

2. Hausaufgabe: **5 Punkte**

(i) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Hypergeometrischen Verteilung.
Hinweis: Beweisen Sie zunächst, dass für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gilt $\binom{a}{b} = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1}$.

(ii) Sei $X \sim \mathrm{Po}_\alpha$ für ein $\alpha \in (0, \infty)$. Bestimmen Sie alle $\beta \in \mathbb{R}$, sodass die Zufallsgröße $\exp(\beta X)$ einen endlichen Erwartungswert besitzt, und berechnen Sie diesen Wert.

3. Hausaufgabe: Lemma 3.3.8 **3 Punkte**
Zeigen Sie:
Der Erwartungswert einer $\mathbb{N}_0$-wertigen Zufallsgröße X (egal, ob er endlich ist, oder nicht) ist gegeben durch

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

4. Hausaufgabe: **9 Punkte**

Wir betrachten ein Zufallsexperiment mit N Urnen. Es wird M Mal unabhängig nach der Gleichverteilung auf den Urnen eine gewählt und eine Kugel hineingelegt, sodass wir am Ende M Kugeln auf N Urnen verteilt haben.
Für $j \in \{1, \ldots, N\}$ sei X_j die Anzahl der Kugeln in der j-ten Urne.

(i) Zeigen Sie: Für alle $(x_1, \ldots, x_N) \in \{0, \ldots, M\}^N$ mit $\sum_{i=1}^N x_i = M$ gilt:

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_N = x_N) = \frac{M!}{x_1! \cdot \ldots \cdot x_N! N^M}.$$

(ii) Folgern Sie aus (i), dass jedes X_i binomialverteilt ist. Geben Sie die Parameter an.

(iii) Zeigen Sie: Für alle $(x_1, x_2) \in \{0, \ldots, M\}^2$ mit $x_1 + x_2 \leq M$ gilt:

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \frac{M!(N-2)^{M-x_1-x_2}}{x_1!x_2!(M-x_1-x_2)!N^M}.$$

(iv) Bestimmen Sie für $l \in \{1, \ldots, N\}$ die Verteilung von $Y_l := \sum_{i=1}^l X_i$.

(v) Sind $X_1, \ldots, X_N$ unabhängig?

(vi) Nun lassen wir die Anzahl $N = N_n$ der Urnen und die Anzahl $M = M_n$ der Kugeln gegen unendlich konvergieren, wobei ihr Quotient gegen ein festes $\lambda \in (0, \infty)$ geht.

Die Anzahl der Kugeln in der i-ten Urne bezeichnen wir nun mit $X_i^{(n)}$. Ermitteln Sie für jedes $k \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}$ den Wert von

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_1^{(n)} = x_1, \ldots, X_k^{(n)} = x_k).$$

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^k} \frac{n!}{(n-k)!} = 1$.