Technische Universität Berlin **SS 2012**
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. W. König
Assistenten: M. Wilke Berenguer
D. Hoffmann
Ausgabe: Mi 16.05.2012
Abgabe: Mi 23.05.2012

6. Übungsblatt „Wahrscheinlichkeitstheorie 1“

Varianz, Kovarianz und Faltung

Dies ist das letzte Blatt der ersten Semesterhälfte!

Gesamtpunktzahl: 20 Punkte

1. Hausaufgabe: **4 Punkte**

(i) Berechnen Sie die Varianz einer zum Parameter $\alpha \in (0,1)$ geometrisch verteilten Zufallsgröße X.

(ii) Aus der Vorlesung ist Ihnen folgende Implikation bekannt: (Korrolar 3.2.12)

> Sind X und Y unabängige Zufallsvariable, so sind auch für alle Funktionen f, g die Zufallsvariablen $f(X)$ und $g(Y)$ unabhängig.

Bleibt die Aussage gültig, wenn man “unabhängig” durch “unkorreliert” ersetzt? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

2. Hausaufgabe: **6 Punkte**

Es bezeichne $Y^{(1)}$ die Anzahl der Einsen und $Y^{(6)}$ die der Sechsen bei n-maligem unabhängigen Werfen eines fairen Würfels.

(i) Geben Sie die Verteilungen von $Y^{(1)}$ und $Y^{(6)}$ an.

(ii) Berechnen Sie die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten von $Y^{(1)}$ und $Y^{(6)}$.

(iii) Bestimmen Sie die Varianz von $Y^{(1)} + Y^{(6)}$.

3. Hausaufgabe: **4 Punkte**

Seien X, Y zwei unabhängige, zum Parameter $\frac{1}{2}$ Bernoulli-verteilte Zufallsvariable. Weisen Sie nach, dass die Zufallsvariablen $X+Y$ und $|X-Y|$ abhängig, aber unkorreliert sind.

4. Hausaufgabe: Poisson-Verteilung **6 Punkte**

Es seien $X \sim \mathrm{Po}_\alpha$ und $Y \sim \mathrm{Po}_\beta$ unabhängige Zufallsvariable, wobei $\alpha, \beta > 0$.

(i) Weisen Sie mit Hilfe der Faltung nach, dass $X + Y \sim \mathrm{Po}_{\alpha+\beta}$. (Beispiel 3.6.5)

(ii) Gilt dies auch, wenn man auf die Voraussetzung der Unabhängigkeit von X und Y verzichtet? Beweisen Sie Ihre Aussage!

(iii) Bestimmen Sie für festes $n \in \mathbb{N}$ die bedingte Verteilung von X gegeben $\{X+Y = n\}$, d.h. $\mathbb{P}(X = k \mid X + Y = n)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.