Technische Universität Berlin **SS 2012**
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. W. König
Assistenten: M. Wilke Berenguer
D. Hoffmann

Ausgabe: Mi 23.05.2012
Abgabe: Mi 30.05.2012

7. Übungsblatt „Wahrscheinlichkeitstheorie 1“
Erzeugende Funktion, Dichte, Verteilungsfunktion

Gesamtpunktzahl: 20 Punkte

1. Hausaufgabe: **2 Punkte**
Sei X eine diskrete Zufallsgröße mit Werten in $\mathbb{N}_0$ und erzeugender Funktion φ_X. Berechnen Sie die erzeugende Funktion von $aX + b$ für $a, b \in \mathbb{N}$.

2. Hausaufgabe: **5 Punkte**
Seien $N, X_1, X_2, \dots$ unabhängige $\mathbb{N}_0$-wertige diskrete Zufallsgrößen auf (Ω, p), so dass $X_1, X_2, \dots$ identisch verteilt sind. Wir setzen

$$S_N(\omega) := \sum_{j=1}^{N(\omega)} X_j(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

.

(i) Zeigen Sie, dass $\varphi_{S_N}(s) = (\varphi_N \circ \varphi_{X_1})(s) = \varphi_N(\varphi_{X_1}(s))$ für alle $|s| < 1$.

(ii) Bestimmen Sie mit Hilfe von (i) den Erwartungswert von S_N.

3. Hausaufgabe: **5 Punkte**
Zeigen Sie für jede der reellen Verteilungen (i) - (iii), dass es sich bei f um eine Wahrscheinlichkeitsdichte handelt. Skizzieren Sie außerdem jeweils die Dichte f sowie die Verteilungsfunktion F.

(i) *Gleichverteilung auf dem Intervall* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ $(a < b)$, d.h.

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{[a,b]}(x),$$

(ii) *Gammaverteilung (mit Parametern* $\alpha > 0$ *und* $\nu > 0$*)*, d.h.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\nu)} \alpha^\nu x^{\nu-1} \exp(-\alpha x), & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\Gamma(\nu) := \int_0^\infty x^{\nu-1} \exp(-x) dx$ die Gamma-Funktion ist,

(iii) *Standard-Cauchy-Verteilung*, d.h.

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

4. Hausaufgabe: **4 Punkte**

Finden Sie jeweils Beispiele für auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsgrößen X, Y, Z mit den Eigenschaften (i)-(iv) oder beweisen Sie, dass solche Beispiele nicht exisitieren.

(i) $\mathbb{P}(\min\{X,Y,Z\} \leq 0.5) = 0$,

(ii) $\mathbb{P}(\min\{X,Y,Z\} \leq 0.5) = 0.5$,

(iii) $\mathbb{P}(\min\{X,Y,Z\} \leq 0.5) = 0.875$,

(iv) $\mathbb{P}(\min\{X,Y,Z\} \leq 0.5) = 1$.

5. Hausaufgabe: Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung **4 Punkte**

Sei X eine Zufallsgröße mit Dichte $f(t) = \alpha e^{-\alpha t}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)$, $\alpha > 0$. Dann nennen wir X exponentiell verteilt zum Parameter α.

(i) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X.

(ii) Zeigen Sie, dass für alle $s, t > 0$

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t)$$

gilt.