Technische Universität Berlin **SS 2012**
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. W. König
Assistenten: M. Wilke Berenguer
D. Hoffmann

Ausgabe: Mi 30.05.2012
Abgabe: Mi 06.06.2012

8. Übungsblatt „Wahrscheinlichkeitstheorie 1"

Gesamtpunktzahl: 20 Punkte

1. Hausaufgabe: LEMMA 4.2.4 **4 Punkte**

Es seien Zufallsgrößen $X_1, \dots, X_n$ mit Dichten $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ gegeben. Zeigen Sie, dass $X_1, \dots, X_n$ genau dann unabhängig sind, wenn eine gemeinsame Dichte gegeben ist durch die Abbildung

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i), \qquad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

2. Hausaufgabe: **6 Punkte**

Seien X und Y unabhängige, identisch verteilte reelle Zufallsgrößen mit stetiger Dichte $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$. Zeigen Sie, dass die Zufallsgröße

$$Z(\omega) := \begin{cases} \frac{X(\omega)}{Y(\omega)}, & \text{falls } Y(\omega) \neq 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

ebenfalls eine Dichte besitzt, und berechnen Sie diese

(i) allgemein,

(ii) für die gleichförmige Verteilung auf $[0, \alpha]$ mit $\alpha > 0$,

(iii) für die Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$.

3. Hausaufgabe: LEMMA 4.3.4 **4 Punkte**

Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige, auf dem Intervall $[0, \alpha]$ gleichförmig verteilte Zufallsgrößen. Sei weiterhin $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$.

(i) Zeigen Sie, dass durch $x \mapsto \mathbb{1}_{[0,\alpha]}(x) n \alpha^{-n} x^{n-1}$ eine Dichte von M_n gegeben ist.

(ii) Berechnen Sie den Erwartungswert von M_n.

(iii) Zeigen Sie, dass die Verteilungsfunktion der Zufallsgröße $Y_n = n(\alpha - M_n)$ für $n \to \infty$ gegen die Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung mit Parameter $\frac{1}{\alpha}$ konvergiert.

4. Hausaufgabe: **3 Punkte**

Sei X exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$, Y normalverteilt mit Parametern μ und σ^2. Seien X und Y unabhängig. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $X^{42}Y$.

5. Hausaufgabe: **3 Punkte**

Seien X und Y zwei unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsgrößen. Berechnen Sie die Verteilung von $X^2 + Y^2$. Geben Sie, wenn möglich, eine Dichte an. Um welche Verteilung handelt es sich hierbei?