Technische Universität Berlin **SS 2012**
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. W. König
Assistenten: M. Wilke Berenguer
D. Hoffmann

Ausgabe: Mi 06.06.2012
Abgabe: Mi 13.06.2012

9. Übungsblatt „Wahrscheinlichkeitstheorie 1“
Dichte, mehrdimensionale Normalverteilung, Poisson-Prozess

Gesamtpunktzahl: 20 Punkte

1. Hausaufgabe: **5 Punkte**
Seien X, Y und Z unabhängige, auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsgrößen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit lässt sich ein Dreieck mit den Seitenlängen X, Y und Z bilden?

2. Hausaufgabe: **4 Punkte**
Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen mit Varianzen ${\sigma_k}^2 = \mathbb{V}(X_k) \in [0,\infty)$. Außerdem seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, $\beta_1, \dots, \beta_n$ Zahlen mit der Eigenschaft

$$\sum_{k=1}^{n} {\sigma_k}^2 \alpha_k \beta_k = 0.$$

Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen $X := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_k$ und $Y := \sum_{k=1}^{n} \beta_k X_k$ unabhängig sind.

3. Hausaufgabe: **5 Punkte**
Sei X eine standardnormalverteilte Zufallsgröße, $a > 0$ und

$$Y := \begin{cases} X, & \text{falls } |X| < a, \\ -X, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass Y ebenfalls standardnormalverteilt ist.

(ii) Zeigen Sie, dass der Zufallsvektor (X, Y) nicht zweidimensional normalverteilt ist.

4. Hausaufgabe: **6 Punkte**
Es seien zufällige Punkte $0 < T_1 < T_2 < \dots$ auf der positiven Achse gegeben. Für $0 \le a < b$ sei $N(a,b]$ die Anzahl dieser Punkte, die im Intervall $(a,b]$ liegen. Die Familie der $N(a,b]$ mit $0 \le a < b$ erfülle die Axiome (P1) bis (P5) aus Abschnitt 4.4. Wir betrachten die Abstände $\tau_k = T_k - T_{k-1}$, wobei $k \in \mathbb{N}$ und $T_0 = 0$, zwischen aufeinanderfolgenden zufälligen Punkte. Zeigen Sie, dass τ_2 und τ_1 unabhängige, zum Parameter $\alpha = \mathbb{E}(N(0,1])$ exponentialverteilte Zufallsgrößen sind.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Abbildung $(t_1, t_2) \mapsto \alpha^2 e^{-\alpha t_2} \mathbb{1}_{\{0 \le t_1 < t_2\}}$ eine Dichte des Zufallsvektors (T_1, T_2) ist.