Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
R. Altmann

Summer 2017
Hand in solutions: Tue, Jun 13
Discussion in class: Tue, Jun 13

Kontrolltheorie – Control theory

Solution of 4. Exercise

– Lyapunov equations –

4.3) condition number of a Lyapunov equation (3 points)

Prove Lemma 3.16:
Let X be the solution of $AX + XA^T = W$ and $\tilde{X}$ the solution of the perturbed Lyapunov equation $\tilde{A}\tilde{X} + \tilde{X}\tilde{A}^T = \tilde{W}$ with $\|\tilde{A} - A\|_2 \le \varepsilon \|A\|_2$ and $\|\tilde{W} - W\|_F \le \varepsilon \|W\|_F$. Is $\varepsilon\kappa < 1$, where κ denotes the condition number of the Lyapunov equation, then

$$\frac{\|\tilde{X} - X\|_F}{\|X\|_F} \le \frac{2\varepsilon\kappa}{1 - \varepsilon\kappa}.$$

Lösung:
Im Beweis nutzen wir des Öfteren $\|X\|_F = \|\operatorname{vec} X\|_2$. Zudem definieren wir $M = (I \otimes A) + (A \otimes I)$ wie in der Vorlesung. Allgemein gilt

$$\|M^{-1}\|_2 = \max_x \frac{\|M^{-1}x\|_2}{\|x\|_2} = \max_y \frac{\|y\|_2}{\|My\|_2} = \Big(\min_y \frac{\|My\|_2}{\|y\|_2} \Big)^{-1}$$

und somit

$$\|M^{-1}\|_2^{-1} = \min_{X \in \mathbb{R}^{n,n}} \frac{\|M \operatorname{vec} X\|_2}{\|\operatorname{vec} X\|_2} = \min_{X \in \mathbb{R}^{n,n}} \frac{\|AX + XA^T\|_F}{\|X\|_F} = \operatorname{Sep} A.$$

Wir betrachten die Vektorisierung der Lyapunov-Gleichungen, d.h., $Mx = b = \operatorname{vec}(W)$ und $\tilde{M}\tilde{x} = \tilde{b} := \operatorname{vec}(\tilde{W})$ mit $x = \operatorname{vec}(X)$ und $\tilde{x} = \operatorname{vec}(\tilde{X})$. Die Voraussetzung an $\tilde{W}$ lässt sich dann schreiben als

$$\|\Delta b\|_2 = \|\operatorname{vec}(\tilde{W} - W)\|_2 = \|\tilde{W} - W\|_F \le \varepsilon \|W\|_F = \varepsilon \|\operatorname{vec}(W)\|_2 = \varepsilon \|b\|_2.$$

Zudem gilt

$$\|M^{-1}\|_2 \|M\|_2 = \frac{1}{\operatorname{Sep} A} \|(I \otimes A) + (A \otimes I)\|_2 \le \frac{2}{\operatorname{Sep} A} \|A\|_2 = \kappa$$

und analog mit der Voraussetzung an $\tilde{A}$,

$$\|M^{-1}\|_2 \|\Delta M\|_2 \le \frac{2}{\operatorname{Sep} A} \|\Delta A\|_2 \le \varepsilon\kappa.$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\frac{\|\tilde{X} - X\|_F}{\|X\|_F} = \frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2} = \frac{\|M^{-1}\|_2 \|M\|_2 \Big(\frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2} + \frac{\|\Delta M\|_2}{\|M\|_2} \Big)}{1 - \|M^{-1}\|_2 \|\Delta M\|_2} \le \frac{2\varepsilon\kappa}{1 - \varepsilon\kappa}.$$