Technische Universität Berlin
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr.Dirk Ferus, Dr. Friederike Körner

WinterSemester 2000

Höhere Mathematik III für E-Techniker

Lösungen zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 4 a) Klassifizieren Sie die Differentialgleichungen ! Welche der vorkommenden Funktionen ist jeweils die unbekannte Funktion?

T i) $\ln(\frac{\partial}{\partial t}\Phi) = \frac{\partial}{\partial t}\Phi$

Unbekannte Funktion : $\Phi(t, \dots)$.

Die DGL ist nicht wirklich eine partielle DGL, da nur Ableitungen nach t vorkommen, obwohl es partielle Ableitungen sind (das Beispiel ist nicht besonders klug gewählt!).

Es ist also eine gewöhnliche, nichtlineare DGL erster Ordnung.

H ii) $e^t\ddot{s} + \cos t\dot{s} + \omega^2 s = \sin 2t$

Unbekannte Funktion: $s(t)$.

Es ist eine gewöhnliche DGL 2. Ordnung. Ob die DGL linear ist, hängt von der Klammerung des zweiten Summanden ab: linear, falls der Term $(\cos t)\dot{s}$ heißt, und nichtlinear falls es $\cos(t\dot{s})$ heißt.

T iii) $\frac{\partial}{\partial t}\rho - \theta^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho = \mu\frac{\partial}{\partial x}\rho$

Unbekannte Funktion: $\rho(x, t)$.

Es ist eine partielle, lineare DGL 2. Ordnung.

H iv) $y'' + 5y' - 27y = xe^{-x}$

Unbekannte Funktion: $y(x)$.

Es ist eine gewöhnliche lineare inhomogene DGL 2. Ordnung.

b)Geben Sie Beispiele für die verschiedenen Arten von Differentialgleichungen!

T i) lineare gewöhnliche DGL 3. Ordnung	$y''' + xy'' - y = \sin x$
H ii) nichtlineare partielle DGL 4. Ordnung	$\dfrac{\partial^4}{\partial t^4}U = \dfrac{\partial^3}{\partial t^3}U\dfrac{\partial}{\partial x}U + U^2$
T iii) nichtlineare gewöhnliche DGL 2. Ordnung	$s'' \cdot \sin s' + s^4 = \ln x$
H iv) lineare partielle DGL 1. Ordnung	$Y' - I(x)Y = R(x)$

Aufgabe 5 Lösen Sie die homogene Differentialgleichung!

T i) $\dot{x} - (\omega^2 \sin t)x = 0$

$$
\begin{aligned}
\iff \quad & \frac{\dot{x}}{x} = \omega^2 \sin t \\
\iff \quad & \frac{d}{dt}\ln(|x|) = \omega^2 \sin t \\
\iff \quad & \ln(|x|) = -\omega^2 \cos t + C \\
\iff \quad & x = Ke^{-\omega^2 \cos t} \quad \text{für belibiges } K \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\textbf{H}\ \text{ii)}\ y' + \frac{1}{1+x^2}y = 0 \\
\Longleftrightarrow\quad & \frac{y'}{y} = -\frac{1}{1+x^2} \\
\Longleftrightarrow\quad & \ln(|y|) = -\arctan x + C \\
\Longleftrightarrow\quad & y = Ke^{-\arctan x} \quad \text{für belibiges } K \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6 Lösen Sie das Anfangswertproblem!

T i) $$y' + 2y = 3e^{5x} \quad y(0) = 1$$

allgemeine Lösung der homogenen DGL ist

$$y_H(x) = ce^{-2x}$$

Ansatz für die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL (Variation der Konstanten)

$$\begin{aligned}
& y(x) = c(x) \cdot y_H(x) \\
\Longleftrightarrow\quad & y(x) = c(x)e^{-2x} \\
\Longrightarrow\quad & y'(x) = c'(x)e^{-2x} - 2c(x)e^{-2x}
\end{aligned}$$

eingesetzt in die DGL ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \overbrace{c'(x)e^{-2x} - 2c(x)e^{-2x}}^{y'} + \overbrace{2c(x)e^{-2x}}^{2xy} = 3e^{5x} \\
\Longleftrightarrow\quad & c'(x)e^{-2x} = 3e^{5x} \\
\Longleftrightarrow\quad & c'(x) = 3e^{7x} \\
\Longleftrightarrow\quad & c(x) = \frac{3}{7}e^{7x} + C
\end{aligned}$$

also ergibt sich

$$y(x) = (\frac{3}{7}e^{7x} + C)e^{-2x}$$

nun muss nur noch die Konstante der Anfangsbedingung angepasst werden:

$$\begin{aligned}
& y(0) = 1 = (\frac{3}{7} + C) \\
\Longleftrightarrow\quad & C = \frac{4}{7}
\end{aligned}$$

Damit lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$y(x) = \frac{3e^{7x}+4}{7}e^{-2x}$$

H ii) $$\dot{s} + 2xs = 3x \quad s(3) = 2$$

allgemeine Lösung der homogenen DGL ist

$$s_H(x) = ce^{-x^2}$$

Ansatz für die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL (Variation der Konstanten)

$$\begin{aligned} & s(x) = c(x) \cdot s_H(x) \\ \Longleftrightarrow \quad & s(x) = c(x)e^{-x^2} \\ \Longrightarrow \quad & s'(x) = c'(x)e^{-x^2} - 2c(x)xe^{-x^2} \end{aligned}$$

eingesetzt in die DGL ergibt sich

$$\begin{aligned} & \overbrace{c'(x)e^{-x^2} - 2c(x)xe^{-x^2}}^{s'} + 2x\,\overbrace{c(x)e^{-x^2}}^{s} = 3x \\ \Longleftrightarrow \quad & c'(x) = 3xe^{x^2} \\ \Longleftrightarrow \quad & c(x) = \frac{3}{2}e^{x^2} + C \end{aligned}$$

also ergibt sich

$$s(x) = (\frac{3}{2}e^{x^2} + C)e^{-x^2} = \frac{3}{2} + Ce^{-x^2}$$

nun muss nur noch die Konstante der Anfangsbedingung angepasst werden:

$$\begin{aligned} & s(3) = 2 = \frac{3}{2} + Ce^{-9} \\ \Longleftrightarrow \quad & C = \frac{1}{2}e^{9} \end{aligned}$$

Damit lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$s(x) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^{9}e^{-x^2}$$

Aufgabe 7 H Wie lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) + f(t)y(t) = g(t)\ ?$$

Ein Blick ins Skript (vgl. S.7) ergibt, dass die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen DGL 1. Ordnung lautet:

$$y(t) = c(t)e^{-\int_{t_0}^{t} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi} \quad \text{wobei} \quad c(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} g(\tau)e^{\int_{t_0}^{\tau} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\tau$$