Technische Universität Berlin
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr.Dirk Ferus, Dr. Friederike Körner WinterSemester 2000

# Höhere Mathematik III für E-Techniker

http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS00/HM3_ET/

## Lösungen zum 10. Übungsblatt

**Aufgabe 3** Lösen Sie das DGL-System!

**T** $$\vec{y}\prime = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin x$$

einziger Eigenwert: $-1$, Eigenvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Hauptvektor erster Stufe: $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung des zugehörigen homogenen GLS:

$$\vec{y} = c_1 e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \left[ e^{-x} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Ansatz vom Typ der rechten Seite für partikuläre Lösung:
zunächst das DGL-System komplex schreiben:

$$\vec{y}\prime = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ix} \qquad \text{da } \sin x = \text{Im } e^{ix}$$

komplexer Ansatz

$$\begin{aligned} & y_P = e^{ix} \vec{w} \\ \Longrightarrow \quad & y_P' = i e^{ix} \vec{w} \end{aligned}$$

in DGL eingesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned} & i e^{ix} \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} e^{ix} \vec{w} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{Im} e^{ix} \\ \Longrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-i & 0 \\ 3 & -1-i \end{pmatrix} \vec{w} \\ \Longrightarrow \quad & \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}(1-i) \end{pmatrix} \\ \Longrightarrow \quad & y_P = e^{ix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}(1-i) \end{pmatrix} = \\ & \cos x \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}(1-i) \end{pmatrix} + i \sin x \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}(1-i) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

also ist die reelle partikuläre Lösung

$$\mathrm{Im} y_P = \cos(x)\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} + \sin x\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

zusammengefasst ist die allgemeine Lösung des Systems

$$y = \cos(x)\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} + \sin x\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} + c_1 e^{-x}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + c_2\left[e^{-x}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix} + x\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]$$

**H**

$$\vec{y}\prime = \begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 2\end{pmatrix}\vec{y} + \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}e^x$$

$$\lambda_1 = 2+i, \qquad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2-i, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix}$$

komplexe Lösung des homogenen Systems

$$y_H = c_1 e^{(2+i)x}\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix} + c_2 e^{(2-i)x}\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix}$$

reelle Lösung

$$y_H = c_1 e^{2x}\left[\cos x\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \sin x\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right] + c_1 e^{2x}\left[\cos x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \sin x\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]$$

Ansatz vom Typ der rechten Seite für die partikuläre Lösung

$$\begin{aligned} & y_P = e^x\vec{w}\\ \Longrightarrow\quad & y_P' = e^x\vec{w}\end{aligned}$$

in System einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} & e^x\vec{w} = \begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 2\end{pmatrix}e^x\vec{w} + \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}e^x\\ \Longrightarrow\quad & \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\vec{w}\\ \Longrightarrow\quad & \vec{w} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\\ \Longrightarrow\quad & y_P = e^x\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\\ \Longrightarrow\quad & y = e^x\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + c_1 e^{2x}\left[\cos x\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \sin x\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right] + c_1 e^{2x}\left[\cos x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \sin x\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]\end{aligned}$$

**Aufgabe 4** Lösen Sie das Anfangswertproblem!

**T** $$\vec{y}\prime = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ 10 & 9 & 1 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}, \qquad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Charakteristisches Polynom, Eigenwerte
und Eigenvektoren der Koeffizientenmatrix

ch. P. $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = (\lambda - 2)^3$

E.wert $\lambda = 2$ mit E. vektor $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Hauptvektor 2. Stufe als Lösung des GLS $(A - 2E)\vec{w}_2 = \vec{w}_1$

$$\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hauptvektor 3. Stufe als Lösung des GLS $(A - 2E)\vec{w}_3 = \vec{w}_2$

$$\Longrightarrow \qquad w_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich die allgemeine Lösung des GLS:

$$y_{allg} = \alpha_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \alpha_2 e^{2x} \left[ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right] +$$

$$\alpha_3 e^{2x} \left[ \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

oder alternativ: Hauptvektor 3. Stufe als Lösung des GLS $(A - 2E)^3 \vec{w}_2 = \vec{0}$ :
Da $(A - 2E)^3$ die Nullmatrix ist, können wir $w_2$ beliebig wählen!
(Natürlich lin. unabh. von $w_1, w_2$) z.B. so:

$$w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich die allgemeine Lösung des GLS:

$$
\begin{aligned}
y_{allg} = c_1 e^{2x} &\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \\
+ c_2 e^{2x} &\left[ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + \\
+ c_3 e^{2x} &\left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2} \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \right]
\end{aligned}
$$

Lösung des AWP:

$$
\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

$$
\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad y = -e^{2x} &\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \\
-2e^{2x} &\left[ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + \\
+2e^{2x} &\left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2} \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \right] = \\
= e^{2x} &\left[ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -16 \\ 26 \\ -10 \end{pmatrix} + x^2 \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \right]
\end{aligned}
$$

**H** $\quad \vec{y}\prime = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \vec{y}, \qquad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ch. P. $\quad -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = (\lambda - 2)^3$

E.wert $\quad \lambda = 2 \quad$ mit E. vektor $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Hauptvektor 2. Stufe als Lösung des GLS $(A-2E)\vec{w}_2 = \vec{w}_1$

$$\Longrightarrow \qquad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hauptvektor 3. Stufe als Lösung des GLS $(A-2E)\vec{w}_3 = \vec{w}_2$

$$\Longrightarrow \qquad \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} \vec{y}_{allg} &= \alpha_1 e^{2x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \\ &+ \alpha_2 e^{2x} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + \\ &+ \alpha_3 e^{2x} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

oder alternativ:Hauptvektor 3. Stufe als Lösung des GLS $(A-2E)^3\vec{w}_2 = \vec{0}$ :
Da $(A-2E)^3$ die Nullmatrix ist, können wir $w_2$ beliebig wählen!
(Natürlich lin. unabh. von $w_1, w_2$) z.B. so:

$$w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich die allgemeine Lösung des GLS:

$$\begin{aligned} y_{allg} &= c_1 e^{2x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \\ &+ c_2 e^{2x} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + \\ &+ c_3 e^{2x} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

Lösung des AWP:

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad y = e^{2x} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

**Aufgabe 5 H** Welche der folgenden Aussagen ist wahr? Ändern Sie die falschen Aussagen so ab, dass diese wahr werden!

Bemerkung: Es gibt natürlich in der Regel mehrere Möglichkeiten eine falsche Aussage so zu ändern, dass daraus eine Richtige entsteht.

a) Jede $(n \times n)$-Matrix hat $n$ linear unabhängige Eigenvektoren.
Falsch! Gegenbeispiele sind z.B. die Matrizen aus Aufgabe 4.
Änderungsvorschlag: Jede $(n \times n)$-Matrix hat höchstens $n$ linear unabhängige Eigenvektoren.

b) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.
Richtig!

c) Eine reelle $(2 \times 2)$-Matrix mit Determinante $\neq 0$ hat immer zwei verschiedene (reelle oder komplexe) Eigenwerte.
Falsch! Gegenbeispiel ist z.B. die Einheitsmatrix.
Änderungsvorschlag: Eine reelle $(2 \times 2)$-Matrix mit Determinante $\neq 0$ hat nicht immer zwei verschiedene (reelle oder komplexe) Eigenwerte.

d) Ist $A$ eine $(n \times n)$-Matrix, so erfüllt jeder Hauptvektor $\vec{v}$ von $A$ zum Eigenwert $\lambda$ die Gleichung $(A - \lambda E)^2 \vec{v} = 0$.
Falsch! Gegenbeispiel sind z.B. die Matrizen aus Aufgabe 4.
Änderungsvorschlag: Ist $A$ eine $(n \times n)$-Matrix, so erfüllt jeder Hauptvektor $\vec{v}$ von $A$ zum Eigenwert $\lambda$ die Gleichung $(A - \lambda E)^\mu \vec{v} = 0$, wobei $\mu$ die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts $\lambda$ ist.