TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr.Dirk Ferus, Dr. Friederike Körner WinterSemester 2000

HÖHERE MATHEMATIK III für E-TECHNIKER

http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS00/HM3_ET/

Lösungen zum 11. Übungsblatt

Aufgabe 1 **Ü** Bestimmen Sie, ob der kritische Punkt $(0, 0)$ stabil, asymptotisch stabil oder instabil ist und skizzieren Sie den Verlauf der Phasenkurven!

i) $\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \vec{x}$

Eigenwerte und -vektoren der Koeff. matrix:

$$\lambda_1 = 2 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Der Gleichgewichtspunkt ist instabil.

ii) $\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \vec{x}$

Eigenwerte und -vektoren der Koeff. matrix:

$$\lambda_1 = -3 + 2\sqrt{2} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -3 - 2\sqrt{2} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 + 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Der Gleichgewichtspunkt ist asymptotisch stabil.

Aufgabe 4 Bestimmen Sie, ob der kritische Punkt $(0, 0)$ stabil, asymptotisch stabil oder instabil ist und skizzieren Sie den Verlauf der Phasenkurven!

T i) $\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$

Eigenwerte und -vektoren der Koeff. matrix:

$$\lambda_1 = 2 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 4 \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Gleichgewichtspunkt ist instabil.

ii) $\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \vec{x}$

Eigenwerte und -vektoren der Koeff. matrix:

$$\lambda_1 = -1 + i \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 - i \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Gleichgewichtspunkt ist asymptotisch stabil.

H i) $\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \vec{x}$

Eigenwerte und -vektoren der Koeff. matrix:

$$\lambda_1 = 1 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Der Gleichgewichtspunkt ist instabil.

ii) $\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{x}$

Eigenwerte und -vektoren der Koeff. matrix:

$$\lambda_1 = i \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2-i}{5} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -i \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2+i}{5} \end{pmatrix}$$

Der Gleichgewichtspunkt ist stabil.

Aufgabe 5 Berechnen Sie den kritischen Punkt $\vec{x}_0$ und untersuchen Sie seine Stabilität, indem Sie die Transformation $\vec{x} = \vec{y} + \vec{x}_0$ durchführen!

T $\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

kritischen Punkt $\vec{x}_0$ aus $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}_0 + \vec{b} = \vec{0}$ berechnen

$$\Longrightarrow \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

System transformieren:

$$\vec{x} = \vec{y} + \vec{x}_0 \qquad \Longrightarrow \dot{\vec{x}} = \dot{\vec{y}}$$

$$\Longrightarrow \quad \dot{\vec{y}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{y}$$

Eigenwerte und -vektoren der Koeff. matrix:

$$\lambda_1 = -1 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -3 \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Gleichgewichtspunkt ist asymptotisch stabil.

H $\quad \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

kritischen Punkt $\vec{x}_0$ aus $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}_0 + \vec{b} = \vec{0}$ berechnen

$$\Longrightarrow \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

System transformieren:

$$\vec{x} = \vec{y} + \vec{x}_0 \qquad \Longrightarrow \dot{\vec{x}} = \dot{\vec{y}}$$

$$\Longrightarrow \quad \dot{\vec{y}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \vec{y}$$

Eigenwerte und -vektoren der Koeff. matrix:

$$\lambda_1 = -1 + i\sqrt{2} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} i\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 - i\sqrt{2} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} i\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Gleichgewichtspunkt ist asymptotisch stabil.

Aufgabe 6 T / H Die komplexe Cosinusfunktion ist definiert als $\cos z = 1/2(e^{iz} + e^{-iz})$. Berechnen Sie Realteil und Imaginaärteil!
Worauf werden jeweils die Geraden $\mathrm{Re} z = const$ und $\mathrm{Im} z = const$ abgebildet?

$$
\begin{aligned}
\cos z &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \\
&= \frac{1}{2}(e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}) = \\
&= \frac{1}{2}[e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^{y}(\cos(-x) + i\sin(-x))] = \\
&= \frac{1}{2}[\cos x(e^{-y} + e^{y}) + i\sin x(e^{-y} - e^{y})] = \\
&= \cos x\frac{e^{y} + e^{-y}}{2} - i\sin x\frac{e^{y} - e^{-y}}{2} = \\
&= \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y
\end{aligned}
$$

Mit $\cos z = u + iv$ folgt nun:
a) ist $y = const \neq 0$ so ist

$$\frac{u^2}{\cosh^2 y} + \frac{v^2}{\sinh^2 y} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1\ .$$

Die zur reellen Achse parallelen Geraden $y = const \neq 0$ werden also auf Ellipsen abgebildet.
b) ist $x = const \neq \frac{k\pi}{2}$ so ist

$$\frac{u^2}{\cos^2 x} - \frac{v^2}{\sin^2 x} = \cosh^2 y - \sinh^2 y = 1\ .$$

Die zur imaginären Achse parallelen Geraden $x = const \neq \frac{k\pi}{2}$ werden also auf Hyperbeln abgebildet.