TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr.Dirk Ferus, Dr. Friederike Körner

WinterSemester 2000

HÖHERE MATHEMATIK III für E-TECHNIKER

http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS00/HM3_ET/

Lösungen zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 4 Finden Sie eine analytische Funktion $f(x+iy)$ für die gilt

T $\quad \mathrm{Re} f = x^3 - 3xy^2$

Sei $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ Nutze Cauchy- Riemannsche DGLen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Mit $u = x^3 - 3xy^2$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y} \\
\Longrightarrow \quad & v = 3x^2y - y^3 + g(x) \\
& \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy = -\frac{\partial v}{\partial x} \\
\Longrightarrow \quad & v = 3x^2y + h(y) \\
\Longrightarrow \quad & v = 3x^2y - y^3 + const. \qquad \text{Wähle } const = 0 \\
\Longrightarrow \quad & f(x+iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) = x^3 + 3ix^2y + 3i^2xy^2 + i^3y^3 = \\
& = (x+iy)^3 = z^3
\end{aligned}$$

H $\quad \mathrm{Im} f = 2xy + x + y$

Mit $v = 2xy + x + y$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 1 = \frac{\partial u}{\partial x} \\
\Longrightarrow \quad & u = x^2 + x + h(y) \\
& \frac{\partial v}{\partial x} = 2y + 1 = -\frac{\partial u}{\partial y} \\
\Longrightarrow \quad & u = -y^2 - y + g(x) \\
\Longrightarrow \quad & u = x^2 - y^2 + x - y \\
\Longrightarrow \quad & f(x+iy) = x^2 - y^2 + x - y + i(2xy + x + y) = \\
& = [x^2 + 2xy - y^2] + [x + iy] + [ix - y] \\
& = (x+iy)^2 + (x+iy)(1+i) = z^2 + (1+i)z
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 Worauf wird der Einheitskreis $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ durch die Möbiustransformation $\phi(z)$ abgebildet?

$$\mathbf{T} \quad \phi(z) = \frac{1+iz}{z}$$

Wir berechnen die Bilder der Punkte $-1, 0, 1, i$

$$\begin{aligned}
\phi(-1) &= \frac{1-i}{-1} = i-1 \\
\phi(0) &= \frac{1}{0} = \infty \\
\phi(1) &= 1+i \\
\phi(i) &= \frac{1+i^2}{i} = 0
\end{aligned}$$

Die Kreislinie $|z| = 1$ wird also auf den Kreis durch die Punkte $i-1$, $i+1$, 0 abgebildet.
Das ist der Kreis um i mit Radius 1.
Da $\phi(0) = \infty$, wird das Innere des Einheitskreises auf das Äußere dieses Kreises abgebildet.

$$\mathbf{H} \quad \phi(z) = \frac{z+i}{z-i}$$

Wir berechnen die Bilder der Punkte $-1, 0, 1, i$

$$\begin{aligned}
\phi(-1) &= \frac{-1+i}{-1-i} = \frac{(-1+i)^2}{(-1-i)(-1+i)} = \frac{-2i}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}i \\
\phi(0) &= \frac{i}{-i} = -1 \\
\phi(1) &= \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{2i}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}i \\
\phi(i) &= \frac{2i}{0} = \infty
\end{aligned}$$

Die Kreislinie $|z| = 1$ wird also auf den "Kreis" durch die Punkte $-\sqrt{2}i$, $\sqrt{2}i$, ∞ abgebildet.
Das ist die imaginäre Achse.
Da $\phi(0) = -1$, wird das Innere des Einheitskreises auf die linke Halbebene abgebildet.

Aufgabe 6 Finden Sie eine konforme Abbildung, die das Gebiet G auf den Einheitskreis $\mathbb{D}$ abbildet!

T $\qquad G = \{z : 0 < \mathrm{Im} z < \frac{\pi}{3}\}$

$w(z) = e^z$ bildet G konform auf den Sektor $\{w = re^{i\phi} : 0 \le \phi \le \frac{\pi}{3}\}$ ab.

$\zeta(w) = w^3$ bildet G konform auf die obere Halbebene ab

$\rho(\zeta) = \dfrac{\zeta - i}{-i\zeta + 1}$ bildet die obere Halbebene konform auf $\mathbb{D}$ ab.

Zusammengefasst ergibt sich folgende Abbildung:

$$f(z) = \frac{e^{3z} - i}{-ie^3 z + 1}$$

H $\qquad G = \{z \in \mathbb{D} : \mathrm{Re} z > 0\}$

Bestimme zuerst eine Möbiustransformation $\phi(z)$ mit $\phi(-i) = 0$, $\phi(i) = \infty$, $\phi(0) = i$

$\phi(z)\frac{z+i}{iz+1}$ erfüllt dies und bildet G konform auf den Sektor $S = \{z : \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z > 0\}$ ab.

$w(\phi) = \phi^2$ bildet S konform auf die obere Halbebene ab.

$\zeta(w) = \frac{w-i}{-iw+1}$ bildet die obere Halbebene konform auf $\mathbb{D}$ ab.

Zusammengefasst ergibt sich folgende Abbildung:

$$f(z) = \frac{(\frac{z+i}{iz+1})^2 - i}{-i\frac{z+i}{iz+1})^2 + 1} =$$
$$\frac{(z+i)^2 - i(iz+1)^2}{-i(z+i)^2 + (iz+1)^2} = \frac{z^2+2z-1}{-z^2+2z+1}$$

(∗) **Aufgabe 7** i) Zeigen Sie, dass jede Möbiustransformation $\phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $ad - bc \neq 0$ genau eine Darstellung $\phi(z) = \frac{\tilde{a}z+\tilde{b}}{\tilde{c}z+\tilde{d}}$ mit $\tilde{a}\tilde{d} - \tilde{b}\tilde{c} = 1$ hat!

Sei $\Delta := ad - bc \neq 0$.

Dann ist $\phi(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{\Delta}z + \frac{b}{\Delta}}{\frac{c}{\Delta}z + \frac{d}{\Delta}}$

ii) Folgern Sie aus i), dass die Abbildung L mit $\frac{az+b}{cz+d} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die Menge aller Möbiustransformationen bijektiv auf die Menge aller komplexen 2×2-Matizen mit Determinante 1 abbildet.

iii) Berechnen Sie die Inverse der Möbiustransformation $\phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $ad - bc = 1$ und vergleichen Sie diese mit der inversen Matrix von $\mathrm{L}(\phi)$.

Die Matrix $L(\phi) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ hat die Inverse $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Berechnung der Inversen von $\phi(z)$:

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \iff (cz+d)w = az+b \iff z = \frac{dz-b}{-cz+a}$$

Es gilt also $L(\phi^{-1}) = (L(\phi))^{-1}$.

iv) Seien $\phi(w) = \frac{aw+b}{cw+d}$ und $\psi(z) = \frac{\tilde{a}z+\tilde{b}}{\tilde{c}z+\tilde{d}}$ zwei Möbiustransformationen. Berechnen Sie $\phi \circ \psi(z) = \phi(\psi(z))$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Produkt der Matrizen $\mathrm{L}(\phi) \cdot \mathrm{L}(\psi)$!

$$\phi(\psi(z)) = \frac{a\frac{\tilde{a}z+\tilde{b}}{\tilde{c}z+\tilde{d}} + b}{c\frac{\tilde{a}z+\tilde{b}}{\tilde{c}z+\tilde{d}} + d} = \frac{(a\tilde{a} + b\tilde{c})z + (a\tilde{b} + b\tilde{d})}{(c\tilde{a} + d\tilde{c})z + (c\tilde{b} + d\tilde{d})}$$

$$L(\phi)\mathrm{L}(\psi) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\tilde{a} + b\tilde{c} & a\tilde{b} + b\tilde{d} \\ (c\tilde{a} + d\tilde{c} & c\tilde{b} + d\tilde{d} \end{pmatrix}$$