Prof. Dr.Dirk Ferus, Dr. Friederike Körner

Höhere Mathematik III für E-Techniker

http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS00/HM3_ET/

Lösungen zum 13. Übungsblatt

Aufgabe 4

T Wählen Sie sich eine Möbiustransformation ϕ, die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ auf die obere Halbebene abbildet. Sei $z \in \mathbb{D}$.
Welchen Winkel bildet die Verbindungsstrecke $\overline{\phi(z)\ \phi(\frac{1}{\bar{z}})}$ mit der reellen Achse?
Haben $\phi(z)$ und $\phi(\frac{1}{\bar{z}})$ denselben Abstand von der reellen Achse?

Wir wählen $\phi(z) = \dfrac{z+i}{iz+1}$. Dann ergibt sich

$$\phi(\frac{1}{z}) = \frac{\frac{1}{z}+i}{i\frac{1}{z}+1} = \frac{1+iz}{i+z} = \frac{1}{\phi(z)}\ .$$

Wirklich interessant ist aber

$$\phi(\frac{1}{\bar{z}}) = \frac{\frac{1}{\bar{z}}+i}{i\frac{1}{\bar{z}}+1} = \frac{1+i\bar{z}}{i+\bar{z}} = \frac{i(-i+\bar{z})}{i(1-i\bar{z})} = \frac{-i+\bar{z}}{1-i\bar{z}} = \frac{\bar{i}+\bar{z}}{\bar{1}+\bar{i}\bar{z}} = \overline{\phi(z)}\ .$$

Man erhält also $\phi(\dfrac{1}{\bar{z}})$ als Spiegelung von $\phi(z)$ an der reellen Achse. In Analogie dazu nennt man die Abbildung $z \mapsto \dfrac{1}{\bar{z}}$ Spiegelung am Einheitskreis.

H Sei ϕ die Möbiustransformation mit $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$ und $\phi(1+i) = \infty$. Worauf wird das Quadrat mit den Ecken $0, 1, 1+i, i$ abgebildet? Machen Sie eine Skizze!

Ansatz: $\phi(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$. Aus den vorgeschriebenen Funktionswerten erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\phi(0) = \frac{b}{d} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad b = 0\\
\phi(1) = \frac{a}{c+d} = 1 \quad &\Longrightarrow \quad a - c - d = 0\\
\phi(1+i) = \infty \quad &\Longrightarrow \quad c(1+i) + d = 0
\end{aligned}$$

Wenn wir $c = 1$ wählen, ergibt sich damit $\phi(z) = \dfrac{-iz}{z-1-i}$

Um das Bild des Quadrats mit den Ecken $0, 1, 1+i, i$ zu bestimmen, berechnen wir noch $\phi(i) = \dfrac{1}{-1} = -1$ und $\phi(\infty) = -i$. Damit wird die reelle Achse auf den Kreis durch $-i, 0, 1$ abgebildet, dessen Mittelpunkt $\frac{1}{2}(1-i)$ ist. Die imaginäre Achse wird auf den Kreis durch $-1, 0, -i$ abgebildet, dessen Mittelpunkt $-\frac{1}{2}(1+i)$ ist.

Also werden die linke und die untere Seite des Quadrates auf die Kreisbögen der oben beschriebenen Kreise zwischen -1 und 0 bzw. zwischen 0 und 1 abgebildet.

Die rechte und und obere Seite werden auf die oberhalb der reellen Achse liegenden Hälften der Geraden durch $-i$ und 1 bzw. $-i$ und -1 abgebildet.

Aufgabe 5

T Man berechne $\int_C \bar{z}\,\mathrm{d}z$ für zwei verschiedene Wege:
a) $C = \{z : \operatorname{Re} z = -1, -1 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\} \cup \{z : -1 \leq \operatorname{Re} z \leq 1, \operatorname{Im} z = 1\}$

Parametrisierung von C_1 in zwei Teilen:

$$
\begin{aligned}
& z_1(t) = -1 + it, \quad -1 \leq t \leq 1 \\
& z_2(t) = t + i, \quad -1 \leq t \leq \\
\Longrightarrow \quad & \int_{C_1} \bar{z}\,\mathrm{d}z = \\
& = \int_{-1}^{1} (-1 - it) \cdot i\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} (t - i) \cdot 1\,\mathrm{d}t = \\
& = [\frac{t^2}{2} - it]_{-1}^{1} + [\frac{t^2}{2} - it]_{-1}^{1} = -4i
\end{aligned}
$$

b) $C = \{z : -1 \leq \operatorname{Re} z \leq 1, \operatorname{Im} z = -1\} \cup \{z : \operatorname{Re} z = 1, -1 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\}$

Parametrisierung von C_2in zwei Teilen:

$$
\begin{aligned}
& z_1(t) = t - i, \quad -1 \leq t \leq 1 \\
& z_2(t) = 1 + it, \quad -1 \leq t \leq 1 \\
\Longrightarrow \quad & \int_{C_1} \bar{z}\,\mathrm{d}z = \\
& = \int_{-1}^{1} (t + i) \cdot 1\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} (1 - it) \cdot i\,\mathrm{d}t = \\
& [\frac{t^2}{2} + it]_{-1}^{1} + [\frac{t^2}{2} + it]_{-1}^{1} = 4i
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6

H Man berechne $\int_{-2i}^{2i} z^2 + 5z\,\mathrm{d}z$
a) längs der direkten Verbindungsstrecke,
b) längs des Halbkreises $C = \{2e^{i\phi} : -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\}$

Bemerkung: Der Integrand ist ein Polynom, also in ganz $\mathbb{C}$ analytisch. Nach dem Cauchyschen Integralsatz muss also das Integral über beide Wege denselben Wert haben, den man (leichter) mit Hilfe einer ausrechnen kann.

$$
\int_{-2i}^{2i} z^2 + 5z\,\mathrm{d}z = [\frac{z^3}{3} + \frac{5z^2}{2}]_{-2i}^{2i} = \frac{-8i}{3} - 10 - (\frac{8i}{3} - 10) = \frac{-16i}{3}
$$

Wegen des Übungseffekts sollen die beiden Integrale aber auch explizit ausgerechnet werden.

Parametrisierung des ersten Wegs:

$$
\begin{aligned}
z(t) &= ti, \quad -2 \le t \le 2 \\
\int_{C_1} z^2 + 5z \,\mathrm{d}z &= \int_{-2}^{2} (-t^2 + 5it) \cdot i \,\mathrm{d}t = \\
&= [-i\frac{2t^3}{3} - \frac{5t^2}{2}]_{-2}^{2} = \\
&= -\frac{16i}{3}
\end{aligned}
$$

Parametrisierung des zweiten Wegs:

$$
\begin{aligned}
z(t) &= 2e^{it}, \quad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} \\
\int_{C_2} z^2 + 5z \,\mathrm{d}z &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (4e^{2it} + 10e^{it}) \cdot 2ie^{it} \,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4ie^{3it} + 10ie^{2it} \,\mathrm{d}t = \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4(-\sin 3t + i\cos 3t) + 10(-\sin 2t + i\cos 2t) \,\mathrm{d}t \\
&= 2[\frac{4}{3}\cos 3t + 5\cos 2t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 2i[\frac{4}{3}\sin 3t + 5\sin 2t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= [0 - 5 - 0 + 5] + 2i[-\frac{4}{3} + 0 - \frac{4}{3} - 0] = -\frac{16i}{3}
\end{aligned}
$$