TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr.Dirk Ferus, Dr. Friederike Körner

WinterSemester 2000

HÖHERE MATHEMATIK III für E-TECHNIKER

Lösungen zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 4 Zeigen Sie mit Hilfe der Wronski-Determinante, dass die Funktionen linear unabhängig sind!

T i) $\sin x,\ \sin 2x,\ \sin 3x$;

$$W_x = \begin{vmatrix} \sin x & \sin 2x & \sin 3x \\ \cos x & 2\cos 2x & 3\cos 3x \\ -\sin x & -4\sin 2x & -9\sin 3x \end{vmatrix} \quad W_{\frac{\pi}{2}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -9 \end{vmatrix} = 18 + 2 \neq 0$$

Also sind die Funktionen $\sin x$, $\sin 2x$ und $\sin 3x$ linear unabhängig.

H ii) x, xe^x, e^{2x}.

$$W_x = \begin{vmatrix} x & xe^x & e^{2x} \\ 1 & (x+1)e^x & 2e^{2x} \\ 0 & (x+2)e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} \quad W_0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Also sind die Funktionen x, e^x und e^{2x} linear unabhängig.

Aufgabe 5 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung!

T i) $\quad y'' + 2y' + \frac{3}{4}y = 0$

Die charakteristische Gleichung der DGL ist:

$$\begin{aligned} & \lambda^2 + 2\lambda + \frac{3}{4} = 0 \\ \iff & (\lambda + \frac{1}{2})(\lambda + \frac{3}{2}) = 0 \\ \iff & \lambda_1 = -\frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Wir erhalten als Lösungsbasis der DGL

$$y_1(x) = e^{-\frac{1}{2}x}, \quad y_2(x) = e^{-\frac{3}{2}x}$$

Die allgemeine Lösung der DGL lautet

$$y = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} + c_2 e^{-\frac{3}{2}x} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

T ii) $y'' + y' + y \qquad\qquad = 0$

Die charakteristische Gleichung der DGL ist:

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$
$$\iff \qquad \lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Wir erhalten als Lösungsbasis der DGL

$$y_1(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x, \quad y_2(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Die allgemeine Lösung der DGL lautet

$$y = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

H iii) $y'' + \frac{7}{2}y' - 2y = 0$

Die charakteristische Gleichung der DGL ist:

$$\lambda^2 + \frac{7}{2}\lambda - 2 = 0$$
$$\iff \lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = -4$$

Wir erhalten als Lösungsbasis der DGL

$$y_1(x) = e^{\frac{1}{2}x}, \quad y_2(x) = e^{-4x}$$

Die allgemeine Lösung der DGL lautet

$$y = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 e^{-4x} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

H iv) $\quad y'' - 25y = 0$

Die charakteristische Gleichung der DGL ist:

$$\lambda^2 - 25 = 0$$
$$\iff \lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = -5$$

Wir erhalten als Lösungsbasis der DGL

$$y_1(x) = e^{5x}, \quad y_2(x) = e^{-}5x$$

Die allgemeine Lösung der DGL lautet

$$y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-5x} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 6 Stellen Sie die lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten auf, deren charakteristisches Polynom die (mit entsprechender Vielfachheit) angegebenen Nullstellen hat. Bestimmen sie ein Fundamentalsystem und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung!

T i)Nullstellen d. char. Polynoms: $0, 1, 1, 3$;

Die charakteristische Gleichung der gesuchten DGL lautet

$$\lambda(\lambda-1)^2(\lambda-3) = \lambda^4 - 5\lambda^3 + 7\lambda^2 - 3\lambda = 0$$

und die gesuchte DGL ist

$$y^{(4)} - 5y^{(3)} + 7y'' - 3y' = 0.$$

Eine Lösungsbasis (= Fundamentalsystem) der DGL ist

$$y_1(x) = e^{0x} \equiv 1, \quad y_2(x) = e^x, \quad y_3(x) = xe^x, \quad y_4(x) = e^{3x}$$

Die allgemeine Lösung der DGL lautet

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 x e^x + c_4 e^{3x} \quad \text{mit } c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

H ii) Nullstellen d. char. Polynoms: $-1, -1, -1, 7$.

Die charakteristische Gleichung der gesuchten DGL lautet

$$(\lambda+1)^3(\lambda-7) = \lambda^4 - 4\lambda^3 - 18\lambda^2 - 20\lambda - 7 = 0$$

und die gesuchte DGL ist

$$y^{(4)} - 4y^{(3)} - 18y'' - 20y' - 7y = 0$$

Eine Lösungsbasis (= Fundamentalsystem) der DGL ist

$$y_1(x) = e^{-x}, \quad y_2(x) = xe^{-x}, \quad y_3(x) = x^2 e^{-x}, \quad y_4(x) = e^{7x}$$

Die allgemeine Lösung der DGL lautet

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x^2 e^{-x} + c_4 e^{7x} \quad \text{mit } c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

H Aufgabe 7 Was ist die Wronski-Determinante und zu welchem Zweck wird sie berechnet?

Die Wronski-Determinante der Funktionen $f_1, \dots, f_n$ ist die Determinante

$$W_x(f_1, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Wenn für ein $x \in \mathbb{R}$ die Wronski-Determinante $W_x(f_1, \dots, f_n) \neq 0$ ist, so sind die Funktionen $f_1, \dots, f_n$ linear unabhängig.

Was für einen Raum bilden die Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung n-ten Grades?

Die Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung n-ten Grades bilden einen n-dimensionalen Vektorraum.

Ist eine Lösungsbasis eine Vektorraumbasis?

Ja, eine Lösungsbasis ist eine Basis des Vektorraums aller Lösungen einer homogenen linearen DGL.