Technische Universität Berlin
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr.Dirk Ferus, Dr. Friederike Körner

WinterSemester 2000

Höhere Mathematik III für E-Techniker

http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS00/HM3_ET/

Lösungen zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 4 Finden Sie die allgemeine Lösung der homogenen DGL durch Reduktion der Ordnung!

T i) $y'' + xy' - (x+1)y = 0$ für $x > 0$ eine Lösung ist $y_1(x) = e^x$

Ansatz für eine weitere linear unbhängige Lösung:

$$\begin{aligned}
& y(x) = c(x)y_1(x) \\
\Longrightarrow \quad & y' = c'y' + cy_1' \\
\Longrightarrow \quad & y'' = c''y_1 + 2c'y_1' + cy_1''
\end{aligned}$$

In DGL einsetzen:

$$\begin{aligned}
& [c''y_1 + 2c'y_1' + cy_1''] + a_1[c'y_1 + cy_1'] + a_0cy_1 = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & c''y_1 + c'(2y_1' + a_1y_1) + c(\underbrace{y_1'' + a_1y_1' + a_0y_1}_{=0}) = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & c''y_1 + c'(2y_1' + a_1y_1) = 0
\end{aligned}$$

Substitution $u := c'$ führt auf

$$\begin{aligned}
& u'y_1 + u(2y_1' + a_1y_1) = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{u'}{u} = -2\frac{y_1'}{y_1} - a_1 \quad \text{falls } u, y \neq 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \ln|u| = -2\ln|y_1| - \int_{x_0}^{x} a_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
\Longleftrightarrow \quad & \ln|u| = \ln y^{-2} - \int_{x_0}^{x} a_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
\Longleftrightarrow \quad & u = K_1 \cdot \frac{1}{y_1^2} e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi}
\end{aligned}$$

Einsetzen der Funktionen $a_1(x)$ und $y_1(x)$, wobei

$$a_1(x) = x \quad y_1(x) = e^x$$

ergibt

$$u(x) = K\frac{1}{e^{2x}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\Longrightarrow \qquad c'(x) = u(x) = Ke^{-\frac{x^2}{2}-2x}$$

mit $K = 1$ ergibt sich

$$c(x) = \int_{x_0}^{x} e^{-\frac{\xi^2}{2}-2\xi}\, \mathrm{d}\xi$$

Dies Integral lässt sich nicht elementar lösen und bleibt so stehen.

$$y(x) = c(x)y_1(x) = e^x \int_{x_0}^{x} e^{-\frac{\xi^2}{2}-2\xi}\, \mathrm{d}\xi$$

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL lautet also

$$Y(x) = \alpha_1(e^x) + \alpha_2 e^x \int_{x_0}^{x} e^{-\frac{\xi^2}{2}-2\xi}\, \mathrm{d}\xi$$

H ii) $y'' + x^2y' + (x - \frac{2}{x^2})y = 0$ eine Lösung ist $y_1(x) = \frac{1}{x}$

$$u = K_1 \cdot \frac{1}{y_1^2} e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(\xi)\, \mathrm{d}\xi}$$

Einsetzen der Funktionen $a_1(x)$ und $y_1(x)$, wobei

$$a_1(x) = x^2, \quad y_1(x) = \frac{1}{x}$$

ergibt

$$u(x) = Kx^2 \cdot e^{-\frac{x^3}{3}}$$

mit $K = -1$ ergibt sich

$$c(x) = e^{-\frac{x^3}{3}} + K_1$$

und somit erhalten wir (mit$K_1 = 0$)

$$y(x) = c(x)y_1(x) = e^{-\frac{x^3}{3}} \cdot \frac{1}{x}$$

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL lautet also

$$Y(x) = \alpha_1 \frac{1}{x} + \alpha_2 \frac{e^{-\frac{x^3}{3}}}{x}$$

Aufgabe 5 Finden Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL!

T i) $$y'' - 7y' + 6y = \sin x$$

Lösung der zugehörigen homogenen DGL ist

$$y_H = \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{6x}$$

Variation der Konstanten (ein Ansatz vom Typ der rechten Seite wäre vermutlich einfacher)

$$y_P = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{6x}$$

führt auf das GLS

$$\begin{pmatrix} e^x & e^{6x} \\ e^x & 6e^{6x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin x \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \qquad 5e^{6x}c_2' = \sin x \qquad \Longleftrightarrow \qquad c_2' = \frac{\sin x}{5e^{6x}}$$

$$\Longrightarrow \qquad c_1' = -\frac{\sin x}{5e^x}$$

$$\Longrightarrow \qquad c_1 = \frac{1}{10}e^{-x}(\cos x + \sin x) + K_1 \qquad c_2 = -\frac{1}{185}e^{-6x}(\cos x + 6\sin x) + K_2$$

und mit $K_1 = K_2 = 0$ ergibt sich als partikuläre Lösung

$$\begin{aligned} y_P &= \frac{1}{10}e^{-x}(\cos x + \sin x)e^x - \frac{1}{185}e^{-6x}(\cos x + 6\sin x)e^{6x} \\ &= \frac{7}{74}\cos x + \frac{5}{74}\sin x \end{aligned}$$

Damit lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$y = \frac{7}{74}\cos x + \frac{5}{74}\sin x + \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{6x}$$

Bemerkung: Der Ansatz vom Typ der rechten Seite wäre

$$y_P = a\sin x + b\cos x$$

H ii) $$y'' + 2y' - 3y = e^x + \sin x$$

Lösung der zugehörigen homogenen DGL ist

$$y_H = \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{-3x}$$

Wir nutzen das Superpositionsprinzip und berechnen die partikulare Lösung in zwei Schritten:

$$\begin{aligned} &y_{P1} \qquad \text{löst} \quad y_{P1}'' + 2y_{P1}' - 3y_{P1} = e^x \quad \text{und} \\ &y_{P2} \qquad \text{löst} \quad y_{P2}'' + 2y_{P2}' - 3y_{P2} = \sin x \end{aligned}$$

Berechnung von y_{P1} mit einem Ansatz vom Typ der rechten Seite

$$\begin{aligned} & y_{P1} = axe^x \quad \text{Resonanzfall: } \lambda = 1 \text{ ist einfache Nullst. des char. Polynoms} \\ \Longrightarrow \quad & y'_{P1} = a(x+1)e^x, \quad y''_{P1} = a(x+2)e^x \end{aligned}$$

in die DGL eingesetzt erhält man

$$\begin{aligned} & [a(x+2)e^x] + 2[a(x+1)e^x] - 3axe^x = e^x \\ \Longleftrightarrow \quad & a(x+2) + 2a(x+1) - 3ax = 1 \\ \Longleftrightarrow \quad & a = \frac{1}{4} \\ \Longrightarrow \quad & y_{P1} = \frac{1}{4}xe^x \end{aligned}$$

Man kann y_{P1} auch mittels Variation der Konstanten berechnen:

$$y_{P1} = c_1(x)e^x + c^2(x)e^{-3x}$$

führt auch das GLS

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} e^x & e^{-3x} \\ e^x & -3e^{-3x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \end{pmatrix} \\ \Longrightarrow \quad & c'_2 = -\frac{1}{4}e^{4x}, \quad c'_1 = \frac{1}{4} \\ \Longrightarrow \quad & c_1 = \frac{1}{4}x + K_1, \quad c_2 = -\frac{1}{16}e^{4x} + K_2 \\ \Longrightarrow \quad & y_{P1} = \frac{1}{4}xe^x - \frac{1}{16}e^x \end{aligned}$$

Berechnung von y_{P2} mit einem Ansatz vom Typ der rechten Seite

$$\begin{aligned} & y_{P2} = a\sin x + b\cos x \\ \Longrightarrow \quad & y'_{P2} = a\cos x - b\sin x \quad y''_{P2} = -a\sin x - b\cos x \end{aligned}$$

in DGL eingesetzt:

$$\begin{aligned} & [-a\sin x - b\cos x] + 2[a\cos x - b\sin x] - 3[a\sin x + b\cos x] = \sin x \\ \Longleftrightarrow \quad & (-4a - 2b)\sin x + (-4b + 2a)\cos x = \sin x \\ \Longrightarrow \quad & -4a - 2b = 1 \quad -4b + 2a = 0 \\ \Longrightarrow \quad & a = -\frac{1}{5}, \quad b = -\frac{1}{10} \\ \Longrightarrow \quad & y_{P2} = -\frac{1}{5}\sin x - \frac{1}{10}\cos x \end{aligned}$$

Als allgemeine Lösung der inhomogenen DGL erhält man also

$$y_{allg} = \frac{1}{4}xe^x - \frac{1}{5}\sin x - \frac{1}{10}\cos x + \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{-3x}$$

Aufgabe 6 Lösen Sie das Anfangswertproblem!

T i) $y'' - 4y' + 4y = 7$ $\qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = \frac{1}{2}$

Lösung der zugehörigen homogenen DGL ist

$$y_H = \alpha_1 e^{2x} + \alpha_2 x e^{2x}$$

Ansatz vom Typ der rechten Seite für eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL:

$$y_P = a, \qquad y_P' = 0, \qquad y_P'' = 0$$

in die DGL eingesetzt ergibt sich

$$0 - 4 \cdot 0 + 4a = 7 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = \frac{7}{4}$$

Also ist die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$y_{allg} = \frac{7}{4} + \alpha_1 e^{2x} + \alpha_2 x e^{2x}$$

Anpassen der Konstanten an das AWP

$$\begin{aligned} 2 = y(0) &= \frac{7}{4} + \alpha_1 & \Longleftrightarrow \qquad & \alpha_1 = \frac{1}{4} \\ y'(x) &= \frac{2}{4} e^{2x} + \alpha_2 (2x+1) e^{2x} & & \\ \frac{1}{2} = y'(0) &= \frac{1}{2} + \alpha_2 & \Longleftrightarrow \qquad & \alpha_2 = 0 \end{aligned}$$

Damit ist die Lösung des AWP

$$y(x) = \frac{7}{4} + \frac{1}{4} e^{2x}$$

H ii) $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} + xe^{-x} \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

Lösung der zugehörigen homogenen DGL ist

$$y_H = \alpha_1 e^{-x} \sin x + \alpha_2 e^{-x} \cos x$$

Ansatz vom Typ der rechten Seite für eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL:

$$y_P = (ax+b)e^{-x}, y_P' = (a - ax - b)e^{-x}, \quad y_P'' = (b - 2a + ax)e^{-x}$$

in die DGL eingesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned} & (b-2a+ax)e^{-x} + 2(a-ax-b)e^{-x} + 2(ax+b)e^{-x} = (1+x)e^{-x} \\ \iff \quad & (b-2a+ax) + 2(a-ax-b) + 2(ax+b) = x+1 \\ \iff \quad & ax + b = x + 1 \qquad \iff \quad a = b = 1 \end{aligned}$$

Also ist die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$y_{allg} = (x+1)e^{-x} + \alpha_1 e^{-x} \sin x + \alpha_2 e^{-x} \cos x$$

Anpassen der Konstanten an das AWP

$$\begin{aligned} 0 = y(0) = 1 + \alpha_2 \quad & \Longrightarrow \quad \alpha_2 = -1 \\ 1 = y'(0) = \alpha_1 + 1 \quad & \Longrightarrow \quad \alpha_1 = 0 \end{aligned}$$

Damit ist die Lösung des AWP

$$y(x) = (x+1)e^{-x} - e^{-x} \cos x$$

Der Ansatz vom Typ der rechten Seite

rechte Seite	Ansatz
$\sum_{n=1}^{N} a_n x^n e^{\alpha x}$	$\sum_{n=1}^{N} b_n x^n e^{\alpha x}$ falls α nicht Nullst. des char. Polynoms
$\sum_{n=1}^{N} a_n x^n e^{\alpha x}$	$x^k \sum_{n=1}^{N} b_n x^n e^{\alpha x}$ falls α k-fache Nullst. des char. Polynoms
$\sum_{n=1}^{N} a_n \sin \alpha x + \sum_{n=1}^{M} \tilde{a}_n \cos \alpha x$	$\sum_{n=1}^{N} b_n \sin \alpha x + \sum_{n=1}^{M} \tilde{b}_n \cos \alpha x$ falls α nicht Nullst. des char. Polynoms
$\sum_{n=1}^{N} a_n \sin \alpha x + \sum_{n=1}^{M} \tilde{a}_n \cos \alpha x$	$x^k[\sum_{n=1}^{N} b_n \sin \alpha x + \sum_{n=1}^{M} \tilde{b}_n \cos \alpha x]$ falls α k-fache Nullst. des char. Polynoms