Technische Universität Berlin
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr.Dirk Ferus, Dr. Friederike Körner

WinterSemester 2000

Höhere Mathematik III für E-Techniker

http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS00/HM3_ET/

Lösungen zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 3 Mittels eines Separationsansatzes bestimme man Lösungen der partiellen DGL!
Für welche Werte der Separationskonstanten λ erhält man eine Lösung?
Diskutieren Sie das Verhalten der Lösungen für die verschiedenen Werte von λ für $x, y \to 0$ bzw.∞.
Ist es möglich, dass $u(1,y) = u(2,y)$ ist ?

T i) $$x^2 u_{xy} + 3y^2 u = 0$$

Separationsansatz:

$$\begin{aligned} & u(x,y) = X(x)Y(y) \\ \Longrightarrow \quad & u_{xy} = X'(x)Y'(y) \end{aligned}$$

Einsetzten in die DGL

$$\begin{aligned} & x^2 X'(x)Y'(y) + 3y^2 X(x)Y(y) = 0 \\ \Longrightarrow \quad & x^2 \frac{X'}{X} = -3y^2 \frac{Y}{Y'} = \lambda \end{aligned}$$

DGL für X:

$$\begin{aligned} & \frac{X'}{X} = \frac{\lambda}{x^2} \quad \text{für } x \neq 0 \\ \Longrightarrow \quad & X = K_1 e^{-\frac{\lambda}{x}} \end{aligned}$$

DGL für Y:

$$\begin{aligned} & \frac{Y'}{Y} = -3\frac{y^2}{\lambda} \\ \Longrightarrow \quad & Y = K_2 e^{-\frac{y^3}{\lambda}} \quad \text{für } \lambda \neq 0 \\ \Longrightarrow \quad & u(x,y) = K e^{-\frac{\lambda}{x} - \frac{y^3}{\lambda}} \quad \text{für } x, \lambda \neq 0 \end{aligned}$$

Diskussion der Lösungen: Für jede dieser Lösungen gilt

$$u(1,y) = e^{-\lambda - \frac{y^3}{\lambda}} \neq e^{-\frac{\lambda}{2} - \frac{y^3}{\lambda}} = u(2,\lambda)$$

Grenzwertbetrachtungen für $x, y > 0$:

$$\begin{array}{llll}
\lambda > 0 & x \to 0^+ & y \to 0 & \Longrightarrow\ u(x,y) \to 0 \\
& & y \to +\infty & \Longrightarrow\ u(x,y) \to 0 \\
& x \to +\infty & y \to 0 & \Longrightarrow\ u(x,y) \to 1 \\
& & y \to +\infty & \Longrightarrow\ u(x,y) \to 0 \\
\lambda < 0 & x \to 0^+ & y \to 0 & \Longrightarrow\ u(x,y) \to +\infty \\
& & y \to +\infty & \Longrightarrow\ u(x,y) \to +\infty \\
& x \to +\infty & y \to 0 & \Longrightarrow\ u(x,y) \to 1 \\
& & y \to +\infty & \Longrightarrow\ u(x,y) \to +\infty
\end{array}$$

H ii) $$x^2 u_x + \frac{u_y}{y} + u = 0$$

Separationsansatz:

$$\begin{aligned}
& u(x,y) = X(x)Y(y) \\
\Longrightarrow \quad & u_x = X'(x)Y(y), \quad u_y = X(x)Y'(y)
\end{aligned}$$

Einsetzten in die DGL

$$\begin{aligned}
& x^2 X'Y + \frac{XY'}{y} + XY = 0 \\
\Longrightarrow \quad & x^2 \frac{X'}{X} + \frac{1}{y}\frac{Y'}{Y} + 1 = 0 \\
\Longrightarrow \quad & x^2 \frac{X'}{X} = \lambda = -\frac{1}{y}\frac{Y'}{Y} - 1
\end{aligned}$$

DGL für X:

$$\begin{aligned}
& \frac{X'}{X} = \frac{\lambda}{x^2} \\
\Longrightarrow \quad & X = K_1 e^{-\frac{\lambda}{x}}
\end{aligned}$$

DGL für Y:

$$\begin{aligned}
& \frac{Y'}{Y} = -(\lambda + 1)y \\
\Longrightarrow \quad & Y = K_2 e^{-\frac{\lambda+1}{2}y^2} \\
\Longrightarrow \quad & U(x,y) = K e^{-\frac{\lambda}{x} - \frac{\lambda+1}{2}y^2}
\end{aligned}$$

Diskussion der Lösungen:

$$u(1,y) = e^{-\lambda - \frac{\lambda+1}{2}y^2} = e^{-\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda+1}{2}y^2} = u(2,y)$$

falls $\lambda = 0$.

Grenzwertbetrachtungen für $x, y > 0$:

$$
\begin{array}{lllll}
\lambda < -1 & x \to 0^+ & y \to 0 & \Longrightarrow & u(x,y) \to +\infty \\
 & & y \to +\infty & \Longrightarrow & u(x,y) \to +\infty \\
 & x \to +\infty & y \to 0 & \Longrightarrow & u(x,y) \to 1 \\
 & & y \to +\infty & \Longrightarrow & u(x,y) \to \infty \\
\lambda = -1 & & & \Longrightarrow & u(x,y) = u(x) = e^{\frac{1}{x}} \\
-1 < \lambda < 0 & x \to 0^+ & y \to 0 & \Longrightarrow & u(x,y) \to +\infty \\
 & & y \to +\infty & \Longrightarrow & \text{Grenzwert existiert nicht} \\
 & x \to +\infty & y \to 0 & \Longrightarrow & u(x,y) \to 1 \\
 & & y \to +\infty & \Longrightarrow & u(x,y) \to 0 \\
\lambda = 0 & \Longrightarrow & & & u(x,y) = u(y) = e^{-\frac{1}{2}y^2} \\
\lambda > 0 & x \to 0^+ & y \to 0 & \Longrightarrow & u(x,y) \to 0 \\
 & & y \to +\infty & \Longrightarrow & u(x,y) \to 0 \\
 & x \to +\infty & y \to 0 & \Longrightarrow & u(x,y) \to 1 \\
 & & y \to +\infty & \Longrightarrow & u(x,y) \to 0
\end{array}
$$